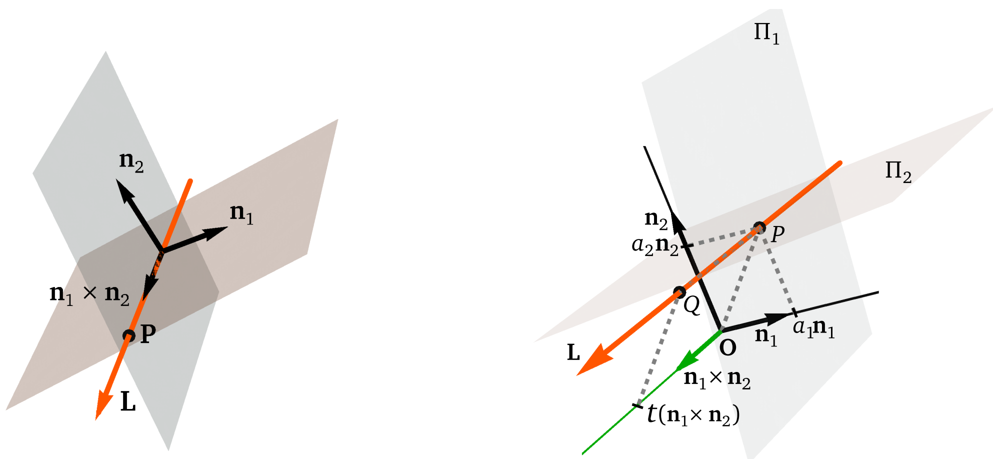
Una fórmula para calcular la intersección de dos planos.

Prof. Walter Mora Flores
Escuela de Matemática
Instituto tecnológico de Costa Rica
wmora2@gmail.com

Resumen. Si dos planos no son paralelos, su intersección es una línea recta. Una ecuación vectorial de la recta de intersección se puede obtener resolviendo un sistema. Para efectos computacionales, en vez de resolver un sistema y manipular una solución con parámetros, podemos usar una fórmula directa para una ecuación vectorial recta de intersección.

Sean $\Pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ y $\Pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ planos no paralelos, es decir, $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \neq 0$, con $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Entonces estos planos se intersecan en una recta $\mathbf{L}$. Como esta recta está en ambos planos, $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son perpendiculares a $\mathbf{L}$, es decir, la recta va en la dirección de $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$

Cualquier punto de la recta se puede expresar como una *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ y $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, es decir, para todo $Q \in \mathbf{L}$ se tiene $Q = a_1\mathbf{n}_1 + a_2\mathbf{n}_2 + t(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)$. En particular $P = a_1\mathbf{n}_1 + a_2\mathbf{n}_2$ está en la recta (figura 1.1). Como $\mathbf{L}$ va en la dirección de $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, entonces a_1 y a_2 son fijos.



$$\mathbf{L}(t) = P + t(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)$$

$$\begin{aligned} Q &= a_1\mathbf{n}_1 + a_2\mathbf{n}_2 + t(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \\ P &= a_1\mathbf{n}_1 + a_2\mathbf{n}_2 \end{aligned}$$

Figura 1.1

Sean $\Pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ y $\Pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ planos no paralelos, es decir, $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \neq 0$, con $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

La recta de intersección $\mathbf{L}$ tiene ecuación vectorial

$$\mathbf{L}(t) = a_1\mathbf{n}_1 + a_2\mathbf{n}_2 + t \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \text{ con } \begin{cases} a_1 = \dfrac{d_1||\mathbf{n}_2||^2 - d_2\,\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{||\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2||^2} \\[2ex] a_2 = \dfrac{d_2||\mathbf{n}_1||^2 - d_1\,\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{||\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2||^2} \end{cases}$$

El código en Mathematica sería

```
(*Datos de entrada*) d1; d2; n1 = {a1, b1, c1}; n2 = {a2, b2, c2};
  n12 = Norm[Cross[n1, n2]]^2;
  a1 = (d1*Norm[n2]^2 - d2*n1.n2)/n12;  a2 = (d2*Norm[n1]^2 - d1*n1.n2)/n12;
  P = a1 n1 + a2 n2;
(*Una ecuación vectorial de la recta de intersección*)
  Li[t_] := P + t*Cross[n1, n2];
```

Deducción de la fórmula. La recta de intersección $\mathbf{L}$ va en dirección de $\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$, solo nos hace falta obtener el punto $P \in \mathbf{L}$.

Para calcular P solo necesitamos obtener a_1 y a_2 pues $P = a_1\mathbf{n}_1 + a_2\mathbf{n}_2$. Como P está en ambos planos Π_1 y Π_2, entonces P se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot P &= d_1 \\ \mathbf{n}_2 \cdot P &= d_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot P &= d_1 \\ \mathbf{n}_2 \cdot P &= d_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot (a_1\mathbf{n}_1 + a_2\mathbf{n}_2) &= d_1 \\ \mathbf{n}_2 \cdot (a_1\mathbf{n}_1 + a_2\mathbf{n}_2) &= d_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + a_2\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 &= d_1 \\ a_1\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1 + a_2\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_2 &= d_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1||\mathbf{n}_1||^2 + a_2\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 &= d_1 \\ a_1\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 + a_2||\mathbf{n}_2||^2 &= d_2 \end{cases}$$

Aplicamos la regla de Cramer y la identidad de Lagrange,

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1 &= \dfrac{d_2\,\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 - d_1||\mathbf{n}_2||^2}{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)^2 - ||\mathbf{n}_1||^2||\mathbf{n}_2||^2} = \dfrac{d_1||\mathbf{n}_2||^2 - d_2\,\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{||\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2||^2} \\ \\ a_2 &= \dfrac{d_1\,\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 - d_2||\mathbf{n}_1||^2}{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)^2 - ||\mathbf{n}_1||^2||\mathbf{n}_2||^2} = \dfrac{d_2||\mathbf{n}_1||^2 - d_1\,\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{||\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2||^2} \end{cases}$$

Entonces una ecuación vectorial de la recta $\mathbf{L}$ es $\mathbf{L}(t) = a_1\mathbf{n}_1 + a_2\mathbf{n}_2 + t \cdot (\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2})$, $t \in \mathbb{R}$.

N Si Π_1 y Π_2 pasan por el origen, $\mathbf{L}(t) = t \cdot (\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2})$, $t \in \mathbb{R}$

Ejemplo 1.1 (Intersección usando una fórmula).

Sean $\Pi_1 : x+z=3$, $\Pi_2 : x+y+z=1$. Determinar una ecuación vectorial de la recta de intersección entre Π_1 y Π_2.

Solución: Los ingredientes son

- $\mathbf{n}_1=(1,0,1)$
- $||\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2||^2=2$
- $\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=2$
- $\mathbf{n}_2=(-1,0,1)$
- $||\mathbf{n}_1||^2=2$
- $d_1=3$
- $\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=(-1,0,1)$
- $||\mathbf{n}_2||^2=3$
- $d_2=1$

Por tanto $\begin{cases} a_1=\dfrac{3\cdot 3-1\cdot 2}{2}=\dfrac{7}{2} \\ a_2=\dfrac{1\cdot 2-3\cdot 2}{2}=-2 \end{cases} \implies P=\frac{7}{2}\mathbf{n}_1-2\mathbf{n}_2=\left(\frac{3}{2},-2,\ \frac{3}{2}\right)$

$$\therefore\ \mathbf{L}(t)=\tfrac{7}{2}\mathbf{n}_1-2\mathbf{n}_2+t\,(\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2)\ =\left(\frac{3}{2},-2,\ \frac{3}{2}\right)+\ t\,(-1,0,1),\ t\ \in\mathbb{R}$$

El código con Mathematica sería

```
d1 = 3; d2 = 1; n1 = {1, 0, 1}; n2 = {-1, 0, 1}; n12 = Norm[Cross[n1, n2]]^2;
a1 = (d1*Norm[n2]^2 - d2*n1.n2)/n12;  a2 = (d2*Norm[n1]^2 - d1*n1.n2)/n12;
P = a1 n1 + a2 n2;
(*Una ecuación vectorial de la recta de intersección*)
Li[t_] := P + t*Cross[n1, n2];
```

Bibliografía

[1] Philip Schneider, David H. Eberly (2002). *Geometric Tools for Computer Graphics*. The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics. 1st Edición

[2] Walter Mora-Flores, José Rosales-Ortega (2022). *Cálculo en varias Variables. Ejemplos y Ejercicios.* En preparación.