Instituto Tecnológico de Costa Rica

TEC| ESCUELA DE MATEMÁTICA CÁLCULO SUPERIOR

Semana 9: Integrales dobles II

Integral doble: Integral iterada. Área

Revista de Matemática/Libros

W. Mora. "Cálculo en Varias Variables."

Las aplicaciones interactivas requieren haber instalado la aplicación gratuita Wolfram CDFPlayer
https://www.wolfram.com/cdf-player/

Wolfram CDF Player

Contenido

9.1 Cálculo de integrales dobles. Integral iterada.

Idea del volumen como una suma de volúmenes de "rebanadas". Consideremos un sólido Q cuya proyección sobre el plano XY es un rectángulo. Tomamos una partición del intervalo $[a,b]$ en el eje X, $a = a_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, luego consideramos las rebanadas "planas" del sólido que se obtienen intersecando el sólido con cada plano $P_k: \; x = x_k$. Digamos que cada rebanada tiene área $A(x_k)$. Cada sección del sólido, entre los planos P_{k-1} y P_k, es aproximadamente un prisma y, su volumen aproximado es $A(x_k)\Delta x_k$. De esta manera: Volumen de $Q: V_Q \approx \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k$

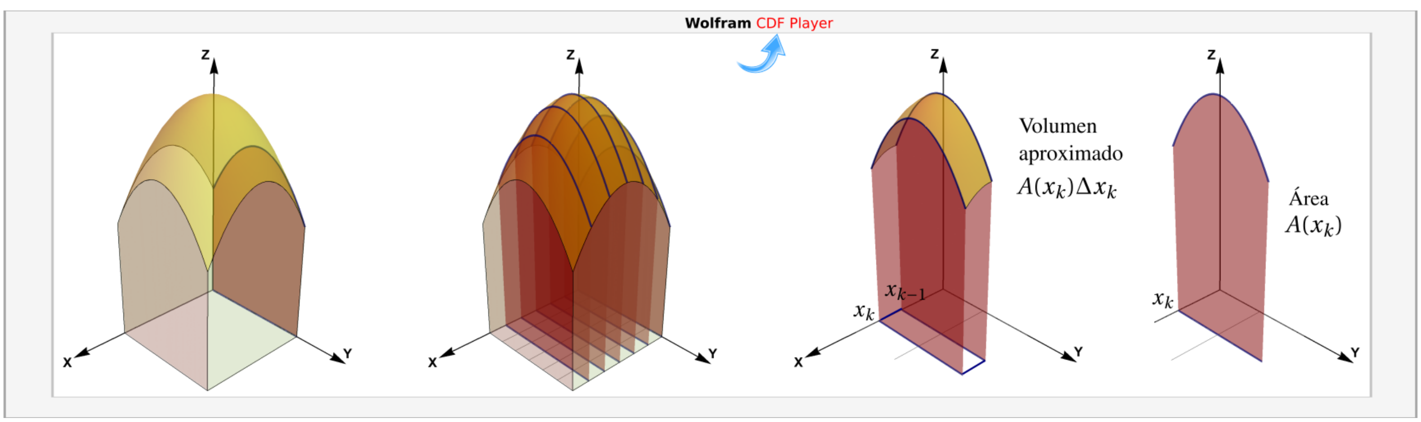


Figura 9.1: Volumen de Q aproximado como una suma del volúmenes de n rebanadas

Ahora, tomando una partición de $[a,b]$ en n subintervalos de igual tamaño tenemos

$$\text{Volumen de } Q: V_Q = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k \; = \int_a^b A(x)\, dx$$

Pero cada área $A(x_k)$ se puede calcular en el plano $x = x_k$ como $A(x_k) = \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(x_k, y)\, dy,$ entonces tendríamos

$$\text{Volumen de } Q : V_Q = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_p^q f(x,y)\, dy \right) dx$$

Integrales iteradas. La idea anterior se puede generalizar a sólidos con una proyección más general. Consideramos un sólido Q entre las superficies (suaves) $S_1 : z = f(x,y)$ y $S_2 : z = g(x,y)$, como se muestra en la figura que sigue; conforme nos desplazamos por los planos $x = x_k$, el área $A(x_k)$ y el volumen V_Q se obtienen como

$$A(x_k) = \int_{g_1(x_k)}^{g_2(x_k)} [f(x_k,y) - g(x_k,y)]\, dy \text{ y entonces } V_Q = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} [f(x,y) - g(x,y)]\, dy \right) dx$$

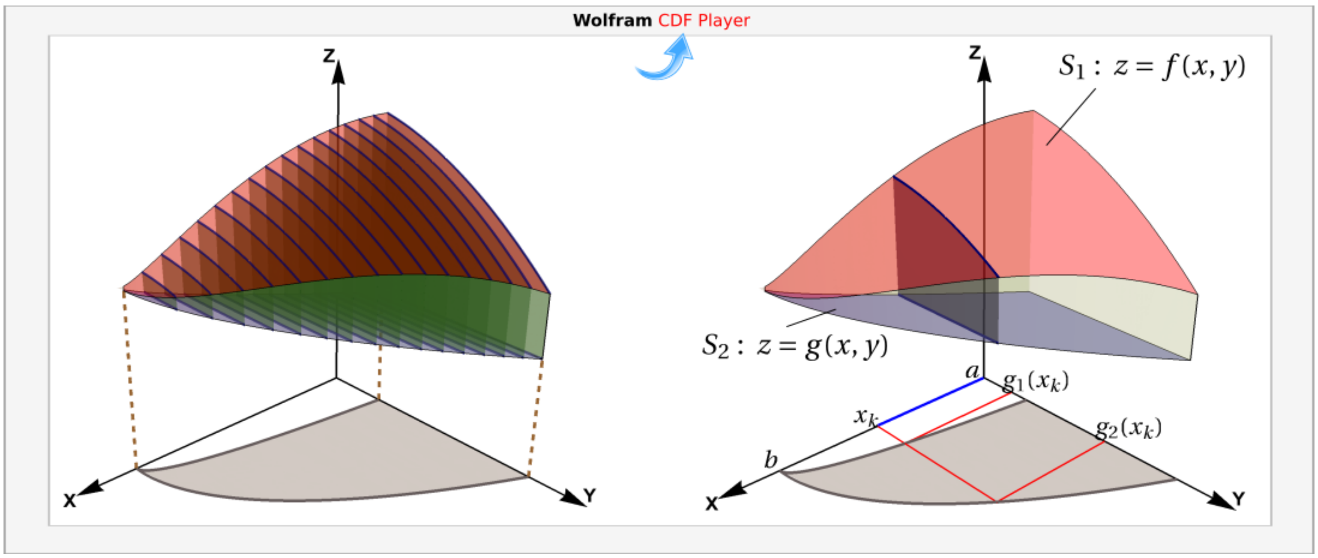


Figura 9.2: Cálculo de integral iterada, en el orden $dy\,dx$

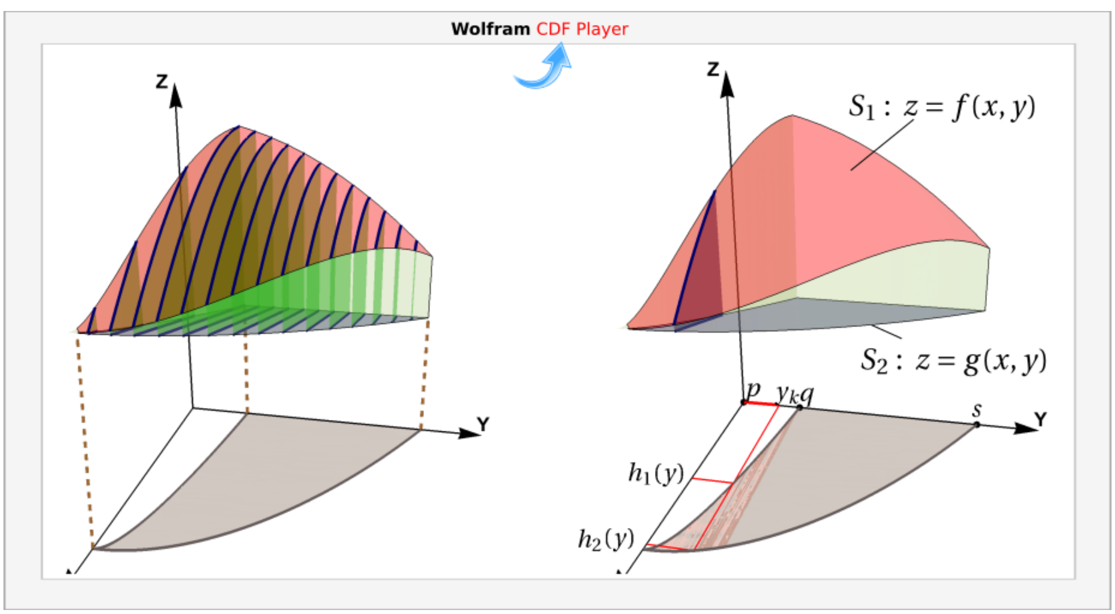


Figura 9.3: Cálculo de integral iterada, en el orden $dx\,dy$

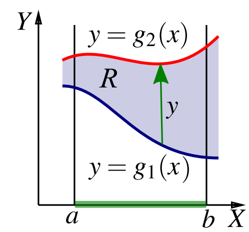
De manera análoga, si nos desplazamos sobre los planos $y = y_k$, el área $A(x_k)$ y el volumen V_Q se obtienen como

$$A(x_k) = \int_{h_1(y_k)}^{h_2(y_k)} [f(x, y_k) - g(x, y_k)]\, dx \text{ y entonces } V_Q = \int_p^q A(x)\, dy = \int_p^q \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} [f(x,y) - g(x,y)]\, dx \right) dy$$

El teorema de Fubini establece que si f es continua sobre R (por tanto Riemann integrable) la integral doble se puede evaluar por "integración parcial" respecto a cada variable, una a la vez. Este es el método de "integrales iteradas". Primero debemos especificar dos maneras de describir una misma región.

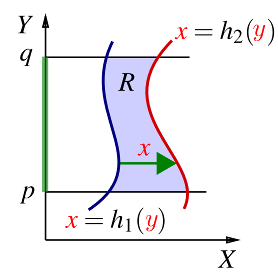
- Región entre las curvas $y = g_1(x)$ y $y = g_2(x)$.

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a \leqslant x \leqslant b$ y $g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$ con g_1 y g_2 funciones continuas en $[a,b]$.



- Región entre las curvas $x = h_1(y)$ y $x = h_2(y)$.

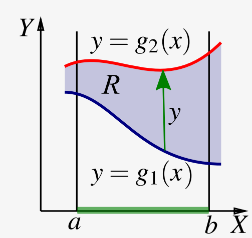
$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $p \leqslant y \leqslant q$ y $h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\}$ con h_1 y h_2 funciones continuas en $[p,q]$.



Teorema 9.1 (Fubini).

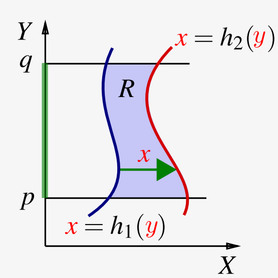
Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a \leqslant x \leqslant b$ y $g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$ con g_1 y g_2 funciones continuas en $[a,b]$. Si f es continua en R, entonces

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy \right] dx$$



Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $p \leqslant y \leqslant q$ y $h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\}$ con h_1 y h_2 funciones continuas en $[p,q]$. Si f es continua en R, entonces

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_p^q \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy = \int_p^q \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx \right] dy$$

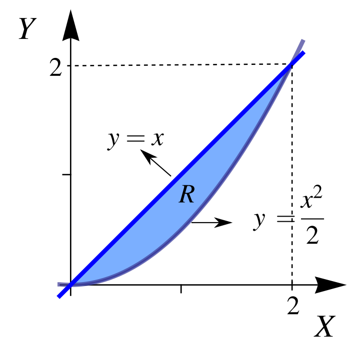


Ejemplo 9.1

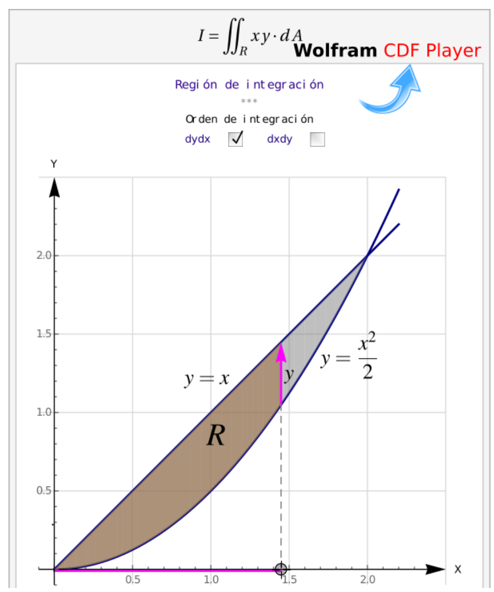
Sea R la región de la figura. Vamos a calcular $\displaystyle\iint_R xy\,dA$ usando el orden de integración "$dy\,dx$" y el orden de integración "$dx\,dy$."

Si la variable independiente es x entonces la región R está entre las curvas $y = x$ (arriba) y $y = \dfrac{x^2}{2}$ (abajo), entre $x = 0$ y $x = 2$.

Tomando a y como variable independiente, entonces la región estrá entre $x = y$ ("abajo") y $x = \sqrt{2y}$ ("arriba") entre $y = 0$ y $y = 2$.



• Integrando en el orden "$dy\,dx$": En este caso, la variable independiente es x.

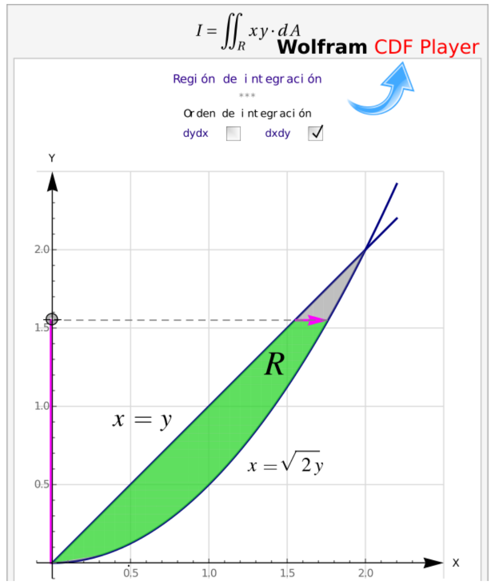


$$\iint_R xy\,dA = \int_0^2 \left[\int_{\frac{x^2}{2}}^{x} xy\,dy\right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[x\,\frac{y^2}{2}\Big|_{\frac{x^2}{2}}^{x}\right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[x\,\frac{x^2}{2} - x\,\frac{x^4}{8}\right] dx = \frac{2}{3}$$

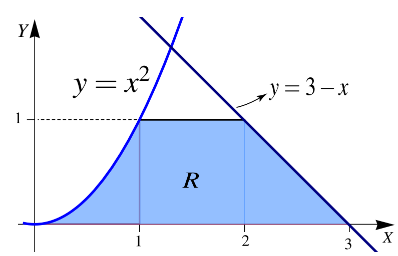
• Integrando en le orden "$dx\,dy$": En este caso, la variable independiente es y.



$$\begin{aligned}
\iint_R xy\, dA &= \int_0^2 \left[\int_y^{\sqrt{2y}} xy\, dx \right] dy \\
&= \int_0^2 \frac{x^2}{2} y \Big|_y^{\sqrt{2y}} dy \\
&= \int_0^2 \left[\frac{2y}{2} y - \frac{y^2}{2} y \right] dy = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

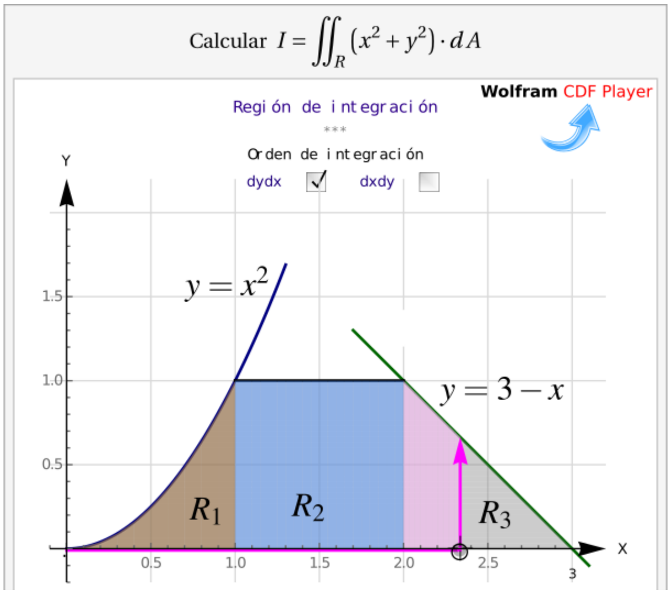
Ejemplo 9.2

En este ejemplo se muestra como el número de regiones de integración puede variar, de acuerdo a la elección del orden de integración.



Considere la integral $I = \iint_R (x^2 + y^2)\, dA$, donde R es la región de la figura. Vamos a calcular esta integral doble, usando el orden de integración "$dy\, dx$" y el orden de integración "$dx\, dy$."

• Orden "$dy\, dx$": en este caso $R = R_1 \bigcup R_2 \bigcup R_3$. La manera de ver la región es como sigue,



$$\iint_R x^2+y^2\,dA = \int_0^1\left[\int_0^{x^2} x^2+y^2\,dy\right]dx+\int_1^2\left[\int_0^1 x^2+y^2\,dy\right]dx+\int_2^3\left[\int_0^{3-x} x^2+y^2\,dy\right]dx$$

$$= \int_0^1 x^2y+\frac{y^3}{3}\Big|_0^{x^2}dx+\int_1^2 x^2y+\frac{y^3}{3}\Big|_0^{1}dx+\int_2^3 x^2y+\frac{y^3}{3}\Big|_0^{3-x}dx$$

$$= \int_0^1 x^4+\frac{x^6}{3}\,dx+\int_1^2\frac{1}{3}+x^2\,dx+\int_2^3 9-9x+6x^2-\frac{4x^3}{3}\,dx = \frac{1207}{210}$$

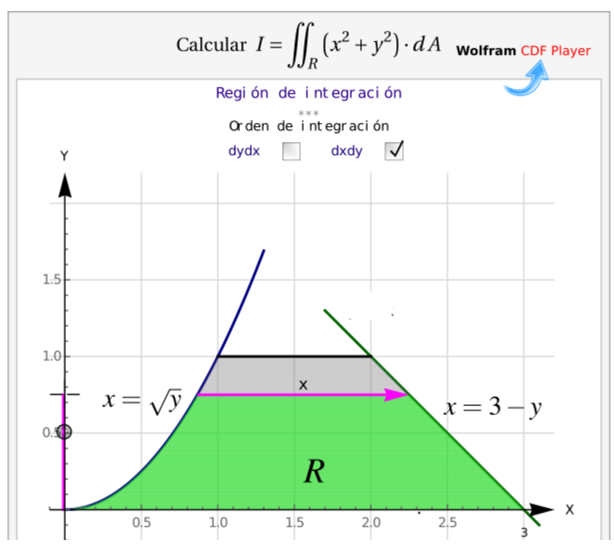
- Orden "dx dy"

$$I = \int_0^1\left[\int_{\sqrt{y}}^{3-y} x^2+y^2\,dx\right]dy$$

$$= \int_0^1\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\Big|_{\sqrt{y}}^{3-y}\right]dy$$

$$= \int_0^1 \frac{(3-y)^3}{3}+(3-y)y^2-\left(\frac{\sqrt{y}^3}{3}+y^2\sqrt{y}\right)dy$$

$$= \frac{1207}{210}$$

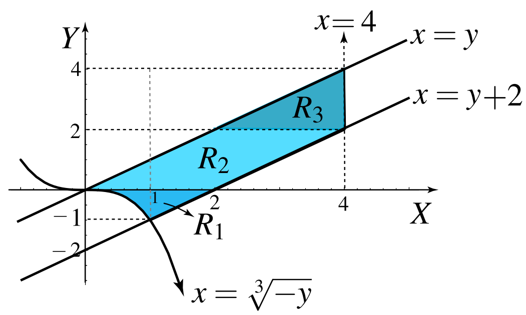


Ejemplo 9.3

Considere la integral $I = \int_0^1 \int_{-x^3}^{x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^4 \int_{x-2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$. Dibuje la región de integración y reescriba la integral en el orden "dx dy."

Solución: La región de integración en la primera integral es $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $x \leqslant y \leqslant -x^3$. La región de integración en la segunda integral es $1 \leqslant x \leqslant 4$ y $x \leqslant y \leqslant x-2$.

En la figura aparece la región de integración. Si y es la variable independiente, $R = R_1 \bigcup R_2 \bigcup R_3$.



• Orden "dx dy"

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_3} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA + \iint_{R_1} f(x,y)\,dA$$

$$= \int_2^4 \int_y^4 f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^2 \int_y^{y+2} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt[3]{y}}^{y+2} f(x,y)\,dx\,dy$$

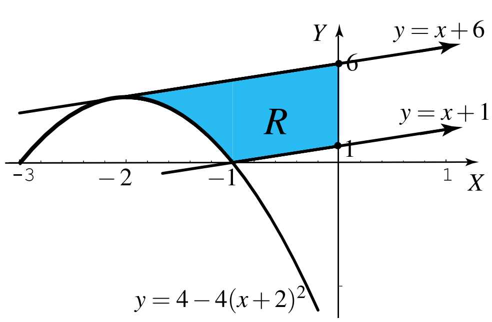
Ejemplo 9.4

Sea $I = \int_{-2}^{-1} \int_{4-4(x+2)^2}^{x+6} dy\,dx \; + \; \int_{-1}^{0} \int_{x+1}^{x+6} dy\,dx.$

a.) Dibuje la región de integración.

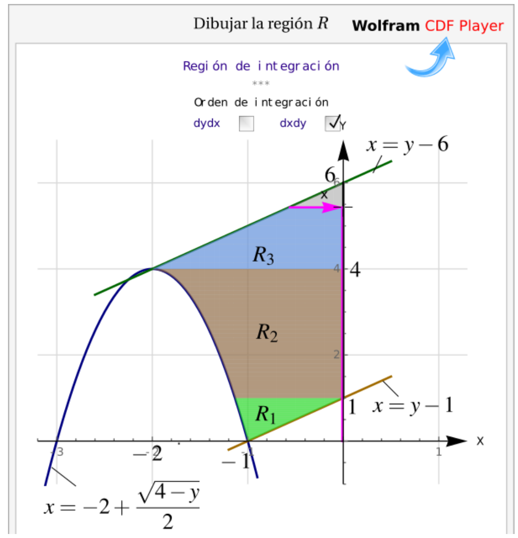
b.) Plantear la integral o las integrales que corresponden a I invirtiendo el orden de integración.

Solución: La región es



$$R \;:\; \begin{cases} 4-4(x+2)^2 \leqslant y \leqslant x+6 & \text{si} \quad -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ x+1 \leqslant y \leqslant x+6 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

Para integrar en el orden "$dx\,dy$" hay que partir la región en tres subregiones R_1, R_2, R_3.



$$\begin{cases} R_1: & -2+\dfrac{\sqrt{4-y}}{2} \leqslant x \leqslant y-1 & \text{si} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \\[2ex] R_2: & -2+\dfrac{\sqrt{4-y}}{2} \leqslant x \leqslant 0 & \text{si} \quad 1 \leqslant y \leqslant 4 \\[2ex] R_3: & y-6 \leqslant x \leqslant 0 & \text{si} \quad 4 \leqslant y \leqslant 6 \end{cases}$$

Luego,

$$I = \int_0^1 \int_{-2+\frac{\sqrt{4-y}}{2}}^{y-1} dx\,dy + \int_1^4 \int_{-2+\frac{\sqrt{4-y}}{2}}^{0} dx\,dy + \int_4^6 \int_{y-6}^{0} dx\,dy$$

9.2 Área de una región

- De acuerdo con nuestra definición de integral doble, el área A_R de una región R se puede calcular con la integral doble ("área de la base × altura")

$$A_R = \iint_R 1\,dA$$

Ejemplo 9.5

Considere una región R de área $A_R = \displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3-x^2} dy\,dx$

1. Dibuje la región R
2. Plantee la o las integrales que permiten calcular A_R en el orden de integración $dx\,dy$.
3. Calcule A_R

Solución:

1. Dibuje la región R: La integral $A_R = \displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3-x^2} dy\,dx$ nos dice que la región R está entre las curvas $y = 2x$ (abajo) y $y = 3 - x^2$ (arriba), entre $x = 0$ y $x = 1$.

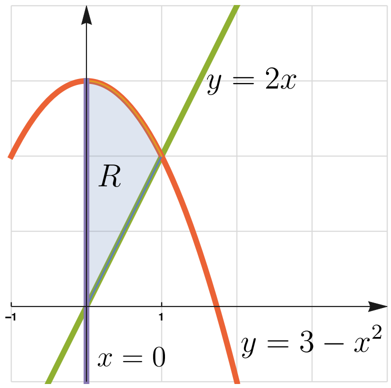


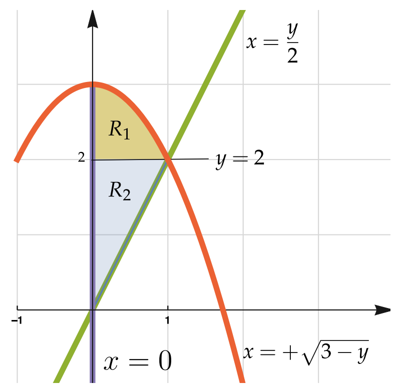
Figura 9.4: Región de integración R

Para calcular A_R en el orden de integración $dxdy$ debemos despejar x como función de y.

$$x = \frac{y}{2} \;\; y \;\; x = +\sqrt{3-y}$$

2. Además debemos calcular la intersección entre estas curvas para poder partir la región apropiadamente.

$y = 2x \;\cap\; y = 3 - x^2 \implies 2x = 3 - x^3 \implies x = 1 \;\wedge\; y = 2$



Región de integración $R = R_1 + R_2$

La región queda de la siguiente manera

$$A_R = \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} dydx + \int_2^3 \int_0^{\sqrt{3-y}} dydx$$

3. $A_R = \displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3-x^2} dydx = \int_0^1 \int_{2x}^{3-x^2} y\Big|_{2x}^{3-x^2} dx = \int_0^1 (3 - x^2 - 2x)dx = \frac{5}{3}\, ul^2$

9.3 Ejercicios

Ⓡ 9.3.1 Considere la integral

$$I = \int_0^1 \int_{2y^2}^{3-\sqrt{y}} 36\, dxdy + \int_{-1}^0 \int_0^{3(y+1)} 36\, dxdy$$

a.) Dibuje la región R de integración.

b.) Plantee la integral I en el orden de integración $dydx$.

c.) Calcule I

9.3.2 El área de la región R_{xy} viene dada por $\displaystyle\int_0^1\int_0^y dx\,dy + \int_1^2\int_0^{\sqrt{2-y}} dx\,dy$. Dibuje la región R_{xy} y calcule la integral en el orden $dy\,dx$.

9.3.3 Considere la integral $\displaystyle I = \int_0^4\int_{4-z}^{8-z^2/2} xy\,dy\,dz + \int_{-4}^0\int_{4+z}^{8-z^2/2} xy\,dy\,dz$. Dibuje la región de integración y plantear la integral I usando el orden de integración $dz\,dy$.

9.3.4 Calcular $\displaystyle\iint_D x^2\cos(y)\,dA$ si D es la región que se muestra en la figura a la derecha

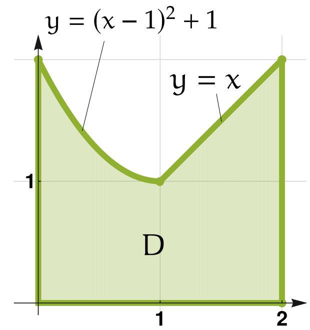
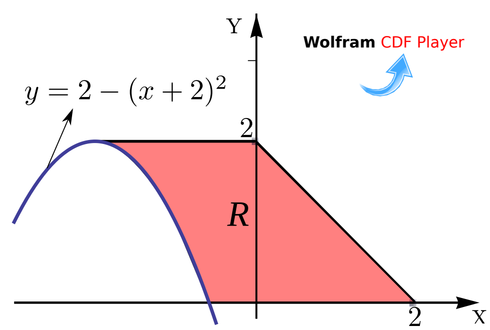
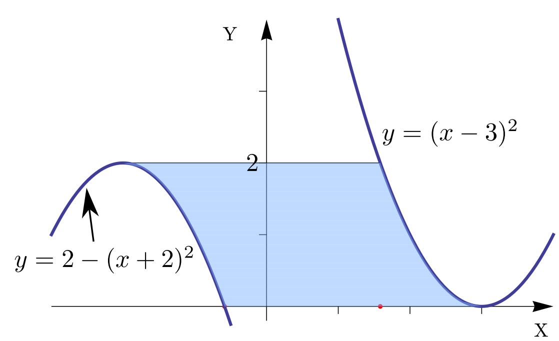


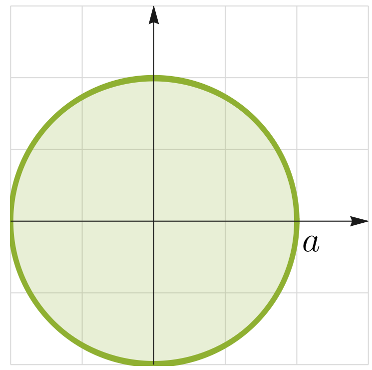
Figura 9.5: Región D

9.3.5 Considere la región R que se muestra a la derecha (región sombreada). Esta región está limitada por las curvas $y = 0$; $y = 2$; $y = 2-(x+2)^2$ y $x+y=2$. Plantear la integral $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dA$ en el orden "$dx\,dy$" y en el orden "$dy\,dx$"



9.3.6 Considere la región R a la derecha. Esta región está limitada por las curvas $y = 0$; $y = 2$; $y = 2-(x+2)^2$ y $y = (x-3)^2$. Plantear la integral $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dA$ en el orden "$dx\,dy$" y en el orden "$dy\,dx$"





Ⓡ **9.3.7** Use integrales dobles para calcular el área del círculo de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$

9.4 Aplicación: Cálculo del centro de masa

Consideremos el "subeybaja" uniforme de la figura a la derecha con masas m_1 y m_2 en cada extremo. Si situamos el "subeybaja" en un sistema de coordenadas XY con el punto de apoyo ("fulcro") en el origen. En este caso, las coordenadas x_1, x_2 cumplen $x_2 < 0 < x_1$.. El "subeybaja"*está en equilibrio* si

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$$

En este caso, si la suma da cero, el *centro de masa* ("punto de balance") sería el origen. El punto de balance o centro de masa los denotamos con $\overline{x}$.

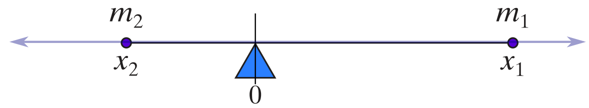


Figura 9.6: El "subeybaja" está en equilibrio si $x_1 m_1 + x_2 m_2 = 0$

Momento. Si tenemos k cuerpos de masa m_i entonces el producto $m_i x_i$ se llama "momento" de este cuerpo respecto al origen del sistema de coordenadas y $m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_k x_k$ se llama el "momento total" respecto al origen.

Para encontrar el centro de masa se usa el siguiente principio de la física

> El centro de masa es el punto $\overline{x}$ con la propiedad de que si toda la masa del sistema fuera concentrada allí, el momento total del nuevo sistema debe ser el mismo que el del sistema original

Es decir, si $M = m_1 + m_2 + ... + m_k$ es la masa total, entonces el centro de masa $\overline{x}$ cumple

$$M\,\overline{x} = x_1\,m_1 + m_2\,x_2 + ... + x_k\,m_k$$

Tenemos entonces $\overline{x} = \dfrac{x_1\,m_1 + m_2\,x_2 + ... + x_k\,m_k}{M}$

En dos y tres dimensiones la idea es similar: Tenemos k cuerpos, el cuerpo i tiene masa m_i

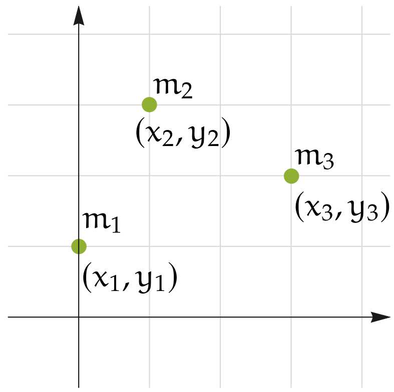


Figura 9.7: Sistema de k masas en $\mathbb{R}^2$

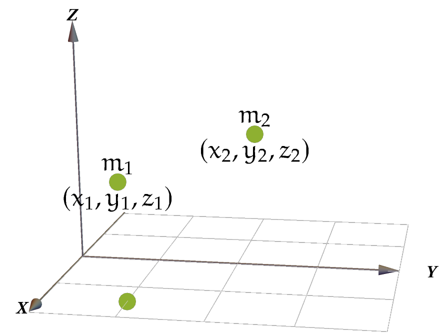


Figura 9.8: Sistema de k masas en $\mathbb{R}^3$

El "momento" mide como el sistema se balancea respecto al sistema de coordenadas. Las coordenadas x_i miden la posición relativa respecto al eje Y y las coordenadas y_i miden la posición relativa respecto al eje X

$$\text{Momento total respecto al eje } Y = \sum_{i=1}^{k} m_i x_i$$

$$\text{Momento total respecto al eje } X = \sum_{i=1}^{k} m_i y_i$$

Nuestro principio físico dice que el centro de masa es el punto $(\overline{x}, \overline{y})$ tal que

$$M\,\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} m_i\, x_i \implies \overline{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} m_i\, x_i}{M}$$

y

$$M\,\overline{y} = \sum_{i=1}^{k} m_i\, y_i \implies \overline{y} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} m_i\, y_i}{M}$$

Y en tres dimensiones el centro de masa $\overline{x},\ \overline{y},\ \overline{z}$ se define de manera similar.

En el caso "continuo" en $\mathbb{R}^2$, tenemos la masa distribuida de una manera continua a través del sistema. Imaginemos que tenemos una "lámina delgada" con densidad $\rho(x, y)$ en cada punto (x, y). La "lámina" es una región D del plano XY, entonces el centro de masa es el punto $(\overline{x}, \overline{y})$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{x} & = & \dfrac{\text{Momento total respecto al eje } Y}{\text{Masa total}} = \dfrac{\displaystyle\iint_D x\,\rho(x, y)\, dA}{M} \\ \\ \overline{y} & = & \dfrac{\text{Momento total respecto al eje } X}{\text{Masa total}} = \dfrac{\displaystyle\iint_D y\,\rho(x, y)\, dA}{M} \end{array}\right. \quad \text{con} \quad M = \iint_D \rho(x, y)\, dA$$

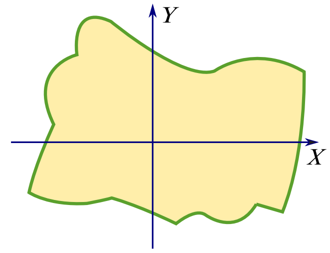


Figura 9.9: "Lámina" D con densidad $\rho(x, y)$ en cada punto (x, y)

Intuitivamente, el término "$\rho(x, y)\, dA$" representa la masa de una pieza de lámina "inifinitamente pequeña" y $M = \iint_D \rho(x, y)\, dA$ es el límite de las sumas de las masas "locales", es decir, la masa total. Las otras integrales son el límite de las sumas de los "momentos" correspondientes.

Valor promedio de una función. El valor promedio de una función es $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre D es

$$\bar{f}_D = \frac{\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dA}{\displaystyle\iint_D 1 \cdot dA}$$

Ejemplo 9.6

Considera la región D, en la figura a al derecha, que representa una "lámina"de densidad $\rho(x, y) = x^2 + y$. Calcule su centro de masa.

Solución:

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\displaystyle\iint_D x\, \rho(x, y)\, dA}{\displaystyle\iint_D \rho(x, y)\, dA} \\ \bar{y} = \dfrac{\displaystyle\iint_D y\, \rho(x, y)\, dA}{\displaystyle\iint_D \rho(x, y)\, dA} \end{cases}$$

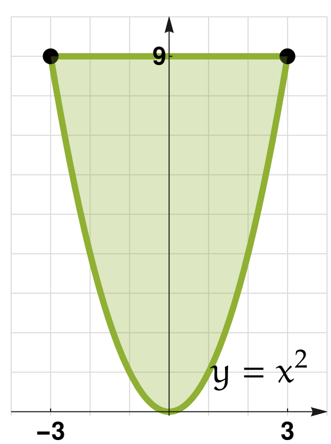


Figura 9.10: Región D : Lámina de densidad $\rho(x, y) = x^2 + y$.

Masa $M = \int_{-3}^{3}\int_{x^2}^{9}(x^2+y)\,dy\,dx = \frac{1296}{5}$

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\int_{-3}^{3}\int_{x^2}^{9} x\,(x^2+y)\,dy\,dx}{M} = 0 \\[2ex] \overline{y} = \dfrac{\int_{-3}^{3}\int_{x^2}^{9} y\,(x^2+y)\,dy\,dx}{M} = \dfrac{45}{7} \approx 6.43 \end{cases}$$

El centro de masa es $(\overline{x},\overline{y}) \approx (0, 6.43)$

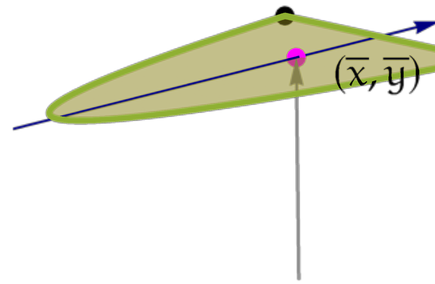
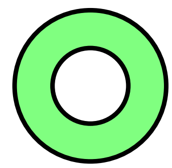


Figura 9.11: Centro de masa $(\overline{x},\overline{y})$

N Puede pasar que el entro de masa quede fuera de la región D, por ejemplo en el caso de que D sea un anillo o tenga forma de herradura, con densidad uniforme



Ejemplo 9.7

Encuentre la masa y el centro de masa de la lámina que ocupa la región que se muestra a la derecha y tiene función de densidad $\rho(x,y) = x + e^{5y+5}$

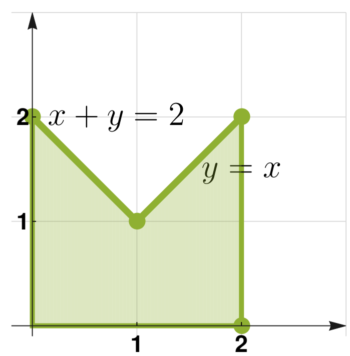


Figura 9.12: Lámina con $\rho(x,y) = x + e^{5y+5}$

Solución: Masa $M = \int_0^1\int_0^{2-x}\left(x+e^{5y+5}\right)dy\,dx + \int_1^2\int_0^{x}\left(x+e^{5y+5}\right)dy\,dx \approx 259703.$

$$\overline{x} = \frac{\int_0^1\int_0^{2-x} x\left(x+e^{5y+5}\right)dy\,dx + \int_1^2\int_0^{x} x\left(x+e^{5y+5}\right)dy\,dx}{M} \approx 1$$

$$\overline{y} = \frac{\int_0^1\int_0^{2-x} y\left(x+e^{5y+5}\right)dy\,dx + \int_1^2\int_0^{x} y\left(x+e^{5y+5}\right)dy\,dx}{M} \approx 1.607187$$

Observe que en este caso el centro de massa está fuera de la la lámina: $(\overline{x},\overline{y}) \approx (1, 1.607)$

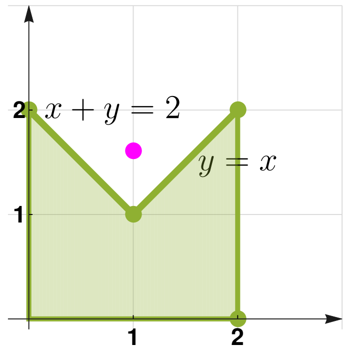


Figura 9.13: Centro de masa $(\overline{x}, \overline{y})$

9.5 Ejercicios

9.5.1 Encuentre la masa y el centro de masa de la lámina que ocupa la región que se muestra a la derecha y tiene función de densidad $\rho(x, y) = 3x^2 + 3y^2$

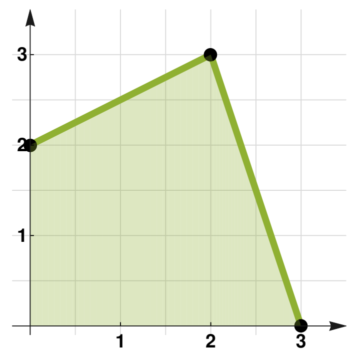


Figura 9.14: Lámina de densidad $\rho(x, y) = 3x^2 + 3y^2$

9.5.2 Encuentre la masa y el centro de masa de la lámina que ocupa la región que se muestra a la derecha y tiene función de densidad $\rho(x, y) = x^2 + y^3$

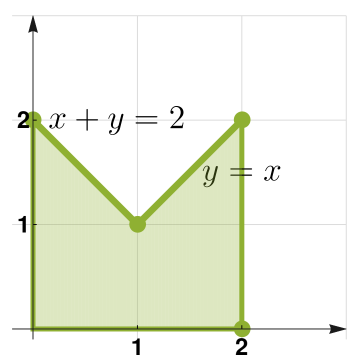


Figura 9.15: Lámina de densidad $\rho(x, y) = x^2 + y^3$

9.5.3 Encuentre la masa y el centro de masa de la lámina que ocupa la región

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } -1 \leqslant x \leqslant 1 \ \wedge \ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

y tiene función de densidad $\rho(x, y) = x^2$

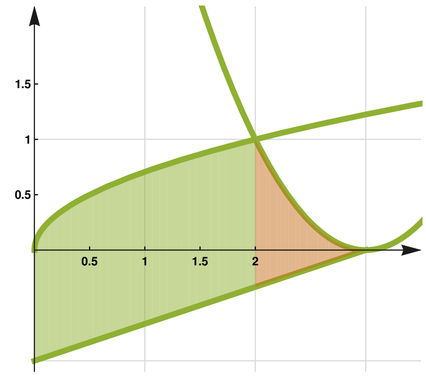
9.5.4 Hallar el promedio de $f(x, y) = y \operatorname{sen}(xy)$ sobre $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$

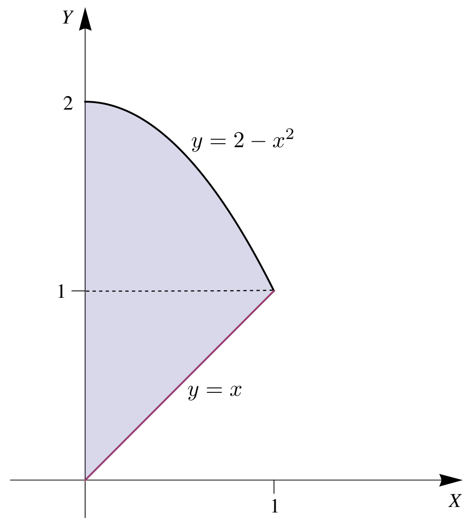
9.5.5 Hallar el promedio de $f(x, y) = e^{x+y}$ sobre el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$

9.6 Solución de los ejercicios

9.3.1 R

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_{\frac{x}{3}-1}^{\sqrt{\frac{x}{2}}} \mathbf{36}\,dy\,dx + \int_2^3 \int_{\frac{x}{3}-1}^{(x-3)^2} \mathbf{36}\,dy\,dx \\ &= \int_0^2 \left(-12x + 18\sqrt{2x} + 36\right)\,dx + \int_2^3 \left(36x^2 - 228x + 360\right)\,dx \\ &= 144 \end{aligned}$$



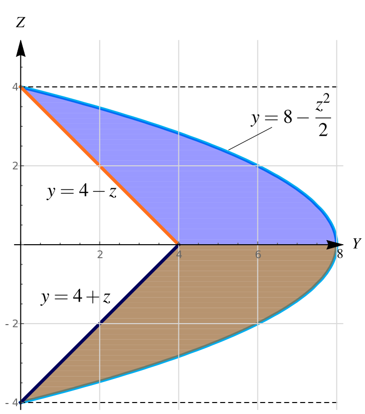


9.3.2 R

$$A_R = \int_0^1 \int_x^{2-x^2} dy\,dx = 7/6$$

9.3.3 R

$$I = \int_0^4 \int_{-\sqrt{16-2y}}^{y-4} xy\,\,dzdy + \int_0^4 \int_{4-y}^{\sqrt{16-2y}} xy\,\,dzdy + \int_4^8 \int_{-\sqrt{16-2y}}^{\sqrt{16-2y}} xy\,\,dzdy$$



9.3.4 R

$$\int_0^1 \int_0^{(x-1)^2+1} x^2\cos(y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^x x^2\cos(y)\,dy\,dx \approx 2.54045$$

9.3.5 R

1. $I = \int_0^2 \int_{-2+\sqrt{2-y}}^{2-y} f(x,y)\cdot\, dx dy$

2. $I = \int_{-2}^{-2+\sqrt{2}} \int_{2-(x+2)^2}^{2} f(x,y)\cdot dy dx + \int_{-2+\sqrt{2}}^{0} \int_{0}^{2} f(x,y)\cdot dy dx + \int_{0}^{2} \int_{0}^{2-x} f(x,y)\cdot dy dx$

9.3.6 ↰ Ⓡ Cuidado, debe escoger la rama correcta en cada parábola.

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^2 \int_{-2+\sqrt{2-y}}^{3-\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-2}^{-2+\sqrt{2}} \int_{2-(x+2)^2}^{2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{-2+\sqrt{2}}^{3-\sqrt{2}} \int_{0}^{2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{3-\sqrt{2}}^{3} \int_{0}^{(x-3)^2} f(x,y)\,dy\,dx$$

9.3.7 ↰ Ⓡ $A = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 1\cdot dy\,dx = a^2\pi$

9.5.1 ↰ Ⓡ Masa $M = 86$

$$\overline{x} = \frac{17}{10}$$

$$\overline{y} = \frac{322}{215}$$

9.5.2 ↰ Ⓡ Masa $M = \int_0^1 \int_0^{2-x} \left(x^2+y^3\right) dy dx + \int_1^2 \int_0^{x} \left(x^2+y^3\right) dy dx = \frac{109}{15}.$

$$\overline{x} = \frac{\int_0^1 \int_0^{2-x} x\left(x^2+y^3\right) dy dx + \int_1^2 \int_0^{x} x\left(x^2+y^3\right) dy dx}{M} \approx 1.3211$$

$$\overline{y} = \frac{\int_0^1 \int_0^{2-x} y\left(x^2+y^3\right) dy dx + \int_1^2 \int_0^{x} y\left(x^2+y^3\right) dy dx}{M} \approx 1.04128$$

Centro de masa $(\overline{x},\overline{y}) \approx (1.3211, 1.04128)$

9.5.3 ↰ Ⓡ Se omite.

9.5.4 ↰ Ⓡ Se omite.

9.5.5 ↰ Ⓡ Se omite.

Citar como:

Walter Mora F. *Cálculo en Varias Variables. Visualización interactiva.* (2019) 2da ed. [ebook] Cartago, Costa Rica. Revista digital, Matemática, Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/.

Revisado: Julio, 2022

Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF: https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

http://www.matematicainteractivacr.com/