Instituto Tecnológico de Costa Rica
TEC| ESCUELA DE MATEMÁTICA CÁLCULO SUPERIOR

Semana 8: Multiplicadores de Lagrange

Aplicaciones: extremos con una restricción. Multiplicaciones de Lagrange

Revista de Matemática/Libros
W. Mora. "Cálculo en Varias Variables."

Las aplicaciones interactivas requieren haber instalado la aplicación gratuita Wolfram CDFPlayer
https://www.wolfram.com/cdf-player/

Wolfram CDF Player

Contenido

8.1 Extremos con restricciones: Multiplicadores de Lagrange . . . 1
8.2 Ejercicios . . . 7
8.3 Solución de los ejercicios . . . 9
Epílogo: ¿Puede fallar el método de Lagrange? . . . 13
Licencia Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0 . . . 15

■

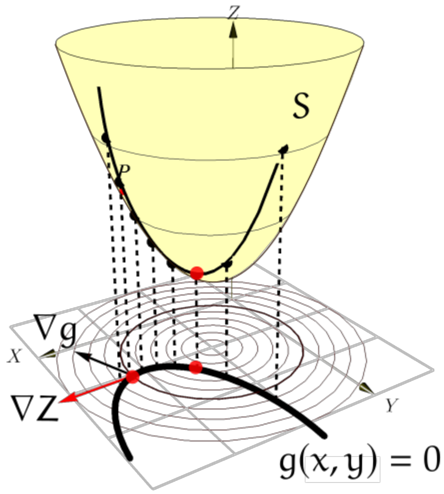
8.1 Extremos con restricciones: Multiplicadores de Lagrange

Supóngase que queremos hallar los máximos y los mínimos relativos de $z = f(x, y)$ sujeto a la restricción $g(x, y) = 0$. Esto significa que la función $f(x, y)$ solo podrá ser evaluada en los puntos (x, y) que estén en la curva de nivel $g(x, y) = 0$, es decir $f(x, y)$ está restringida (o sujeta) a $g(x, y) = 0$.

Una manera de resolver este problema, en el caso de un mínimo local, se puede obtener con un análisis geométrico de la situación: En las cercanías de un mínimo local, nos desplazamos sobre g en la dirección de máximo *decrecimiento* de f, hasta el punto "más profundo" que puede alcanzarse sobre g en esta dirección. Este punto podría ser el mínimo local con restricciones que andamos buscando.

Digamos que $P = (a, b, c)$ es el mínimo local con restricciones. Para poder determinar este punto con una ecuación, podemos pensar que viajamos a "este punto más profundo" atravesando curvas de nivel, entonces la "última" curva de nivel debería ser una curva de nivel $z = c$ tangente a g en P (si P no es un punto terminal de g). Que estas curvas sean tangentes significa que sus gradientes son paralelos, es decir, $\nabla z(a, b) = \lambda \nabla g(a, b.)$ Esta es la ecuación que usamos para determinar P.

El análisis es similar para determinar un máximo local con restricciones: En las cercanías de un máximo local, nos desplazamos sobre g en la dirección de máximo crecimiento hasta el punto más profundo que podamos alcanzar, sobre g.



Teorema 8.1 (Multiplicadores Lagrange. Condición de primer orden)

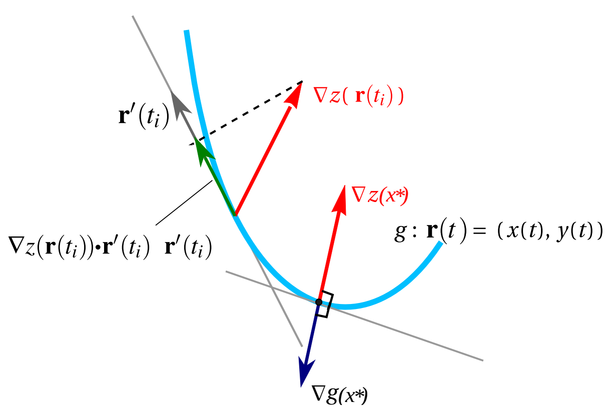
Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y sean $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones C^1 y sea $\mathbf{x}^*$ un extremo local de f en el conjunto $D = \{\mathbf{x} \in U \,|\, g(\mathbf{x}) = 0.\}$ Entonces, si $\nabla g(\mathbf{x}^*) \neq (0,0)$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (que puede ser cero) tal que

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) - \lambda \nabla g(\mathbf{x}^*) = (0,0)$$

El teorema dice que los extremos locales $\mathbf{x}^*$ de f sujetos a la restricción $g(x,y) = 0$ (y $\nabla g(\mathbf{x}^*) \neq (0,0)$), son puntos críticos de la función "lagrangiana" $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y)$, pero no necesariamente viceversa. Puede suceder que algunos puntos críticos de L no sean extremos locales de f sujeto a la restricción $g(x,y) = 0$.

En el caso de $z = f(x,y)$ sujeta a $g(x,y) = 0$, podríamos informalmente justificar el teorema así: Supongamos que la curva g se puede dar en forma paramétrica como $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ y sea $\mathbf{x}^* = \mathbf{r}(t_0)$ un extremo local de este problema con restricciones. Entonces, usando regla de la cadena, debería tenerse $\left.\dfrac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\right|_{t=t_0} = 0$, entonces

$$\left.\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\right|_{t=t_0} = \left.\frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\right|_{t=t_0} = \left.\left(\frac{\partial f}{\partial x} x'(t),\ \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)\right)\right|_{t=t_0} = \nabla f(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$$



Esto nos dice que $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ es perpendicular al vector tangente a la curva de restricción en $\mathbf{x}^*$, es decir, $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ y $\nabla g(\mathbf{x}^*)$ son paralelos donde se alcanzan los extremos locales (si $\nabla g(\mathbf{x}^*) \neq 0$)... pero no necesariamente viceversa.

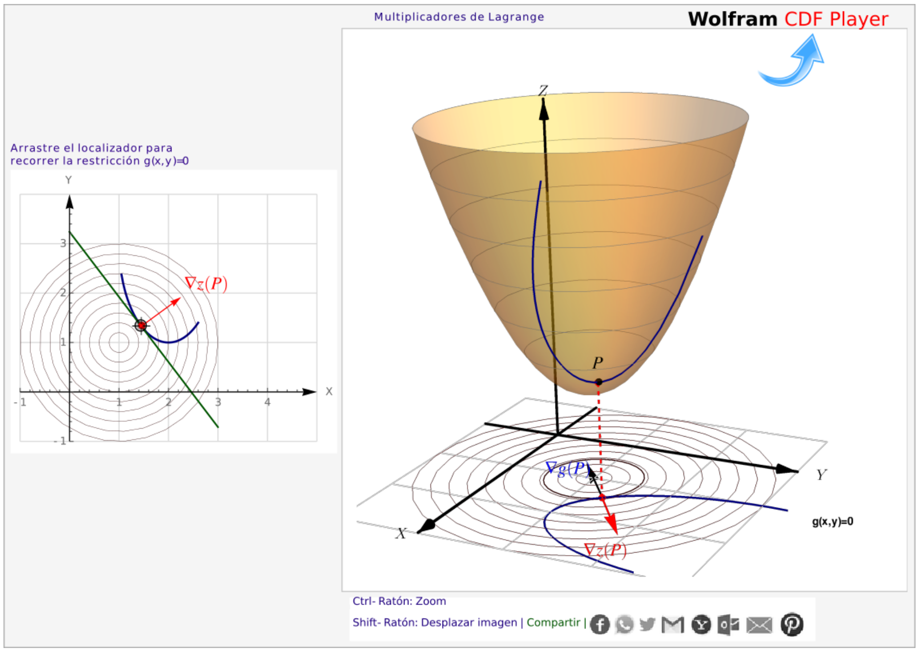


Figura 8.1: Un problema de optimización con restricciones.

Método de los multiplicadores de Lagrange con una restricción:

- Para minimizar o maximizar $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ sujeta a la condición $g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, se busca los puntos críticos de $L(x_1, y_1, ..., x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda g(x_1, x_2, ..., x_n)$.

  Para hallar los puntos críticos de $L(x_1, y_1, ..., x_n, \lambda)$ se debe resolver el sistema

$$\begin{cases} L_{x_1} & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{x_n} & = & 0 \\ g(x_1, x_2, ..., x_n) & = & 0 \end{cases}$$

  En tres variables, podríamos encontrar los puntos críticos del problema de optimización, como soluciones del sistema

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda\, g(x, y, z)$$

  A λ se le llama multiplicador (de Lagrange). Observe que λ podría ser cero. Esto pasa por ejemplo cuando un extremo local con restricciones coincide con un extremo local (sin restricciones).

- **Criterio de clasificación.** Para determinar si los puntos críticos son máximos, mínimos o no son ni máximos ni mínimos, se podría recurrir a al criterio de la Hessiana orlada (que no vemos en este curso). Sin embargo, en los problemas que siguen, los puntos críticos se pueden clasificar de manera directa (usando la geometría del problema o una comparación).

Ejemplo 8.1

Maximizar y minimizar $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{3}\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$ sujeto a la restricción $x^2 + \frac{4y^2}{9} = 1$.

Solución: Sea $L(x,y,\lambda) = x^2 + \frac{1}{3}\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + 1 - \lambda\left(x^2+\frac{4y^2}{9}-1\right)$.

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \Longrightarrow x(1-\lambda) = 0 \quad (E1) \\ \frac{2}{3}\left(y-\frac{3}{2}\right) - \frac{8\lambda y}{9} = 0 \quad (E2) \\ 1 - x^2 - \frac{4y^2}{9} = 0 \quad (E3) \end{cases}$$

De (E1) vemos que la solución del sistema requiere que $x = 0$ o $\lambda = 1$. Si $x = 0$, sustituyendo en (E3) obtenemos los puntos $y = \pm 3/2$.
Si $\lambda = 1$, sustituimos en la ecuación (E2) y obtenemos $y = -4.5$, pero al sustituir en la ecuación (E2) nos da una soluciön compleja.

Los puntos críticos de L son $(0,3/2)$ con $\lambda = 0$ y $(0,-3/2)$ con $\lambda = 1.5$. Evaluando en f cada punto, obtenemos que en $(0,3/2)$ se alcanza un mínimo local (coincide con el mínimo de f, por eso $\lambda = 0$) y en $(0,-3/2)$ se alcanza un máximo local.

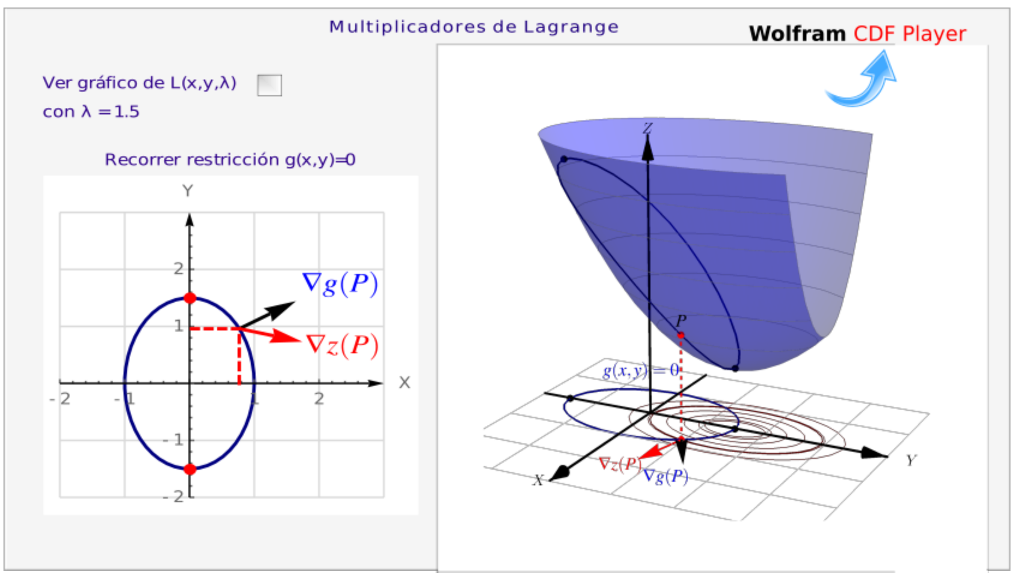


Figura 8.2: Un problema de optimización con restricciones.

Ejemplo 8.2

Minimizar $z = x^2 + y^2$ sujeto a $x - y = 0$.

Solución: Sea $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x-y) \Longrightarrow \begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ x - y = 0 \quad (E3) \end{cases}$

Sustituyendo $x = \lambda/2$ y $y = -\lambda/2$ en (E3) obtenemos $\lambda = 0$ y, por tanto, $x = 0,\ y = 0.$

En este caso, $\lambda = 0$ indica que el mínimo con restricciones coincide con un mínimo local de z.

Ejemplo 8.3

Determine tres números reales positivos $x,\ y,\ z$ cuya suma sea 10 y su producto máximo.

Solución: Hay que maximizar el producto $P = xyz$ sujeto a la restricción $x + y + z = 10$.

Sea $L(x, y, \lambda) = xyz - \lambda(x + y + z - 10)$.

$$\begin{cases} L_x & = & 0 \\ L_y & = & 0 \\ L_z & = & 0 \\ g(x,y,z) & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} yz - \lambda & = & 0 \\ xz - \lambda & = & 0 \\ xy - \lambda & = & 0 \\ x + y + z - 10 & = & 0 \quad (E4) \end{cases}$$

Despejando λ obtenemos

$$yz = xz \quad \text{y} \quad xz = xy.$$

Como $x,\ y$ y z son, en este caso, positivos; podemos cancelar y entonces $x = y = z$. Sustituyendo en (E4) nos queda $3x - 10 = 0$, es decir, $x = y = z = \dfrac{10}{3}$.

Ejemplo 8.4

Determine el máximo y el mínimo de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeto a $x^4 + y^4 = 1$

Solución: La lagrangiana es $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^4 + y^4 - 1)$

- **Puntos críticos:**

$$\begin{cases} L_x & = & 2x - \lambda 4x^3 & = & 0 \\ L_y & = & 2y - \lambda 4y^3 & = & 0 \\ L_\lambda & = & -x^4 - y^4 + 1 & = & 0 \quad (E3) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x(1 - 2\lambda x^2) & = & 0 \\ 2y(1 - 2\lambda y^2) & = & 0 \\ -x^4 - y^4 + 1 & = & 0 \quad (E3) \end{cases}$$

Casos para anular las tres ecuaciones:

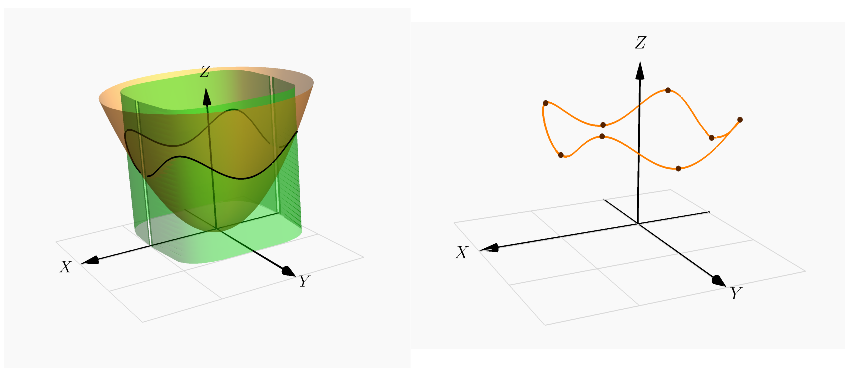
- Caso $x = 0$ y $y = 0$. Al sustituir en (E3) obtenemos $1 = 0$. No obtenemos puntos críticos.

- Caso $x = 0$ y $1 - 2\lambda y^2 = 0$. Al sustituir en (E3) obtenemos los puntos críticos $(0, \pm 1)$ y $\lambda = 1/2$.

- Caso $y = 0$ y $1 - 2\lambda x^2 = 0$. Al sustituir en (E3) obtenemos los puntos críticos $(\pm 1, 0)$ y $\lambda = 1/2$.

- Caso $1 - 2\lambda y^2 = 0$ y $1 - 2\lambda x^2 = 0$. Elevando al cuadrado obtenemos $4\lambda^2 y^4 = 1$ y $4\lambda^2 x^4 = 1$. Multiplicando (E3) por $4\lambda^2$ a ambos lados y sustituyendo, obtenemos los cuatro puntos críticos $\left(\frac{\pm 1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{\pm 1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ y $\lambda^2 = 1/2$.

Para clasificar los puntos de manera "empírica", podemos evaluar en la función f. Para visualizar la situación, dibujamos la curva de intersección entre la superficie $z = x^2 + y^2$ y la superficie generada por la curva $x^4 + y^4 = 1$.



así, tenemos cuatro puntos máximos relativos, $\left(\frac{\pm 1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{\pm 1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$ y cuatro puntos mínimos relativos, $(0, \pm 1, 1)$, $\quad (\pm 1, 0, 1)$

Ejemplo 8.5

Calcule el valor mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$ si (x, y) son puntos de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

Solución: . El problema es minimizar la función objetivo $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$ sujeto a la restricción $x^2 - y^2 - 1 = 0$.

La lagrangiana es $L(x, y, \lambda) = x^2 + (y - 2)^2 - \lambda(x^2 - y^2 - 1)$

- **Puntos críticos:** Debemos resolver el sistema $\nabla L = 0$, es decir,

$$\begin{cases} L_x = 2x - 2\lambda x & = 0 \\ L_y = 2(y - 2) + 2\lambda y & = 0 \\ L_\lambda = x^2 - y^2 - 1 & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x(1 - \lambda) & = 0 \quad \text{(E1)} \\ (y - 2) + \lambda y & = 0 \quad \text{(E2)} \\ x^2 - y^2 - 1 & = 0 \quad \text{(E3)} \end{cases}$$

De (E1) vemos que tenemos dos casos, $x = 0$ y $\lambda = 1$.

El caso $x = 0$ no es solución pues no satisface (E3).

El caso $\lambda = 1$ lo sustituimos en (E2) y obtenemos $y = 1$ y este valor de y lo sustituimos en (E3) y obtenemos $x = \pm\sqrt{2}$. Este procedimiento nos garantiza que todas las ecuaciones se anularon y que son la solución del sistema.

Los puntos críticos son $(\sqrt{2}, 1)$ y $(-\sqrt{2}, 1)$. Para determinar de manera empírica el mínimo, evaluamos estos puntos en f.

$f(\sqrt{2}, 1) = 3$

$f(-\sqrt{2}, 1) = 3$

En este caso, los dos puntos $(\sqrt{2}, 1, 3)$ y $(-\sqrt{2}, 1, 3)$ son mínimos locales.

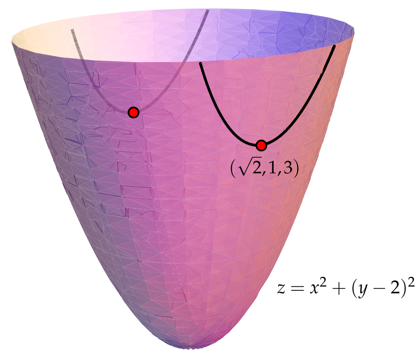


Figura 8.3: Mínimos locales

8.2 Ejercicios

8.2.1 Considere el problema: "Optimizar $f(x,y) = x^2+y^3+1$ sujeto a la restricción $x^2-y^2 = -1$" tiene un máximo y un mínimo local. Utilizando multiplicadores de Lagrange, determine el máximo local y el mínimo local.

8.2.2 Considere el problema: "Optimizar $f(x,y) = x^2+y^3+1$ sujeto a la restricción $x^2-y^2 = 1$" tiene varios máximos y un mínimos locales. Utilizando multiplicadores de Lagrange, determine los máximos locales y los mínimos locales.

8.2.3 Considere el plano $\Pi : x - 2y + 4z = 4$ y $Q = (1,0,1) \notin \Pi$. Determine el punto $P = (x,y,z) \in \Pi$ tal que la distancia $d(Q,\Pi) = d(Q,P)$ es mínima.

8.2.4 Considere la superficie $S : \; z = x^2 - y^2$ y $Q = (0,2,2) \notin S$. Determine el punto $P = (x,y,z) \in S$ tal que la distancia $d(Q,S) = d(Q,P)$ es mínima.

8.2.5 Considere la superficie S de ecuación $xy^2z = 32$.

a.) Si $(x,y,z) \in \mathbf{S}$ entonces $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $z \neq 0$, ¿Porqué?

b.) Use multiplicadores de Lagrange para encontrar los puntos $\mathbf{Q} = (x,y,z) \in \mathbf{S}$ que están más cerca del origen $O = (0,0,0)$.

8.2.6 La densidad de una superficie metálica esférica de ecuación $x^2+y^2+z^2=4$ está dada por $\rho=2+xz+y^2$. Encuentre los puntos donde la densidad es mayor y menor.

8.2.7 Maximizar $z=1-y$ sujeto a la condición $x^6+y^6=1$.

8.2.8 Obtener el máximo local de $f(x,y)=9-x^2-y^2$ sujeta a $x+y=3$

8.2.9 Sean k una constante positiva y $C(r,h)=2kr^2+2.5(2krh)$ con $r,h>0$. Minimizar $C(r,h)$ sujeta a la restricción $kr^2h=1000$.

8.2.10 Determine los valores máximos y mínimos de $z=x^2y^2$ sujeta a la condición $x^2+y^2=1$.

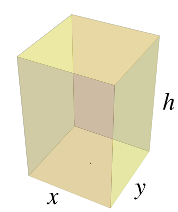
8.2.11 Calcule el valor mínimo de la función $f(x,y)=x^2+(y-2)^2$ si (x,y) son puntos de la hipérbola $x^2-y^2=1$.

8.2.12 Un tanque sin tapa, de forma de caja rectangular, debe tener un volumen de 8000 cm^3. Los costos anuales de calefacción se calculan de la siguiente manera: \$2 por cm^2 para el fondo y para dos de las caras laterales (opuestas) y \$4 por cm^2 para las restantes dos caras laterales. Hallar las dimensiones del tanque que minimizan el costo.

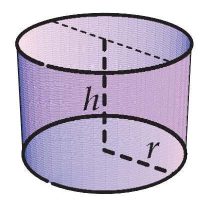
8.2.13 Para la construcción de una caja de base rectangular, con tapa, con un volumen de $16m^3$ se tiene la siguiente función de costo para los materiales

$$C(x,y,h)=18xy+16xh+12yh$$

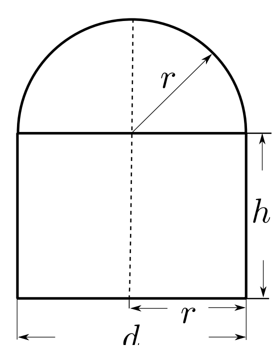
Utilizando Multiplicadores de Lagrange, calcule las dimensiones de la caja de modo que el costo de los materiales sea mínimo.



8.2.14 Se quiere construir un cilindro circular recto con fondo pero *sin* tapa (ver figura). Si se dispone de $48\pi\,cm^2$ de lata para construirlo; use multiplicadores de Lagrange para determinar las dimensiones del cilindro de tal manera que su volumen sea máximo.



8.2.15 Se desea construir un tanque para almacenar agua caliente en un cilindro con un tope esférico (media esfera).
El tanque se debe diseñar de tal manera que puede almacenar $300m^3$ de líquido. Determinar la altura total y el diámetro del tanque de tal manera que la pérdida de calor en la superficie sea mínima. (La pérdida de calor en la superficie será mínima si su área es mínima).



Ⓡ **8.2.16** (*) Consideremos el problema: Minimizar $f(x,y) = x^3 + y^3$ sujeto a la restricción $g = x - y = 0$. $(0,0)$ *no* es ni máximo ni mínimo local de f en D pues $\forall\, \epsilon > 0$, $(\epsilon, \epsilon) \in D$ y $(-\epsilon, -\epsilon) \in D$ pero $f(0,0) = 0 > f(-\epsilon,-\epsilon) = -2\epsilon^3$ y $f(0,0) = 0 < f(\epsilon,\epsilon) = 2\epsilon^3$. Sin embargo, verifique que $(0,0)$ es la única solución del sistema $\nabla L(x,y,\lambda) = 0$

Ⓡ **8.2.17** (*) Consideremos el problema: Maximizar $z = -y$ sujeto a la restricción $y^3 - x^2 = 0$. El punto $(0,0,0)$ es un máximo local para este problema pues como $y^3 = x^2$ entonces $y \geqslant 0$ por lo que $z(x,y) = -y \leqslant= 0 = z(0,0)$ $\forall\, (x,y) \in D$. Verfique que $(0,0)$ no es punto crítico de $L(x,y,\lambda) = -y - \lambda(y^3 - x^2)$.

8.3 Solución de los ejercicios

8.2.1 Ⓡ $L(x,y,\lambda) = x^2+y^3+1-\lambda(x^2-y^2+1) \implies \begin{cases} 2x(1-\lambda) &= 0 \implies x = 0 \lor \lambda = 1 \\ 3y^2 + 2\lambda y = 0 &= 0 \quad (E2) \\ x^2 - y^2 + 1 &= 0 \quad (E3) \end{cases}$

- $x = 0$ en (E2) nos da $y = \pm 1$ y sustituyendo en (E2) nos da $\lambda = \pm 3/2$, así que $(0, \pm 1)$ son dos puntos críticos.

- $\lambda = 1$ en (E2) nos da $y = 0$ y $y = -2/3$ pero al sustituir en (E3) no nos da solución.

Puntos críticos: $(0,-1)$, $(0,1)$. Máximo local $(0,1,2)$ y mínimo local $(0,-1,0)$

8.2.2 Ⓡ Puntos críticos: $(1,0,1)$, $(-1,0,1)$, $\left(\frac{\sqrt{13}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{13}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Los máximo locales son $(1,0,2)$ y $(-1,0,2)$ y los mínimos locales son $\left(\frac{\sqrt{13}}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{58}{27}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{13}}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{58}{27}\right)$

8.2.3 Ⓡ $L(x,y,z,\lambda) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2} - \lambda(x - 2y + 4z - 4)$

$$\Delta L = 0 \implies \begin{cases} x &= \dfrac{20}{21} \\ y &= \dfrac{2}{21} \\ z &= \dfrac{17}{21} \\ \lambda &= \dfrac{-1}{\sqrt{21}} \end{cases}$$

$P = \left(\frac{20}{21}, \frac{2}{21}, \frac{17}{21}\right) \in \Pi$ y $d(Q,\Pi) = ||Q - P|| = \dfrac{1}{\sqrt{21}}$

8.2.4 Ⓡ $L(x,y,z,\lambda) = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2} - \lambda(z - x^2 - y^2)$

$\Delta L = 0 \implies x = 0,$ y $2y^3 - 3y - 2 = 0$. La solución de la cúbica se puede hacer con la calculadora. De este modo:

$P \approx (0,\ 1.47569,\ 2.17765)$ y $d(Q,\Pi) = ||Q - P|| \approx 0.553592$

8.2.5 Ⓡ

a.) Como $xy^2z = 32$ entonces x, y ni z puede ser nulos (sino el producto sería 0).
b.) Problema: "Minimizar $d(Q, O)$ sujeto a la restricción $xy^2z = 32$."

"Minimizar $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sujeto a la restricción $xy^2z = 32$."

Sea $L(x, y, z, \lambda) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \lambda(xy^2z - 32) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \lambda xy^2z - 32\lambda)$.

• Puntos críticos.

$$\begin{cases} L_x &= 0 \\ L_y &= 0 \\ L_z &= 0 \\ L_\lambda &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \lambda y^2 z &= 0 \quad \text{(E1)} \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 2\lambda xyz &= 0 \quad \text{(E2)} \\ \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \lambda xy^2 &= 0 \quad \text{(E3)} \\ xy^2z - 32 &= 0 \quad \text{(E4)} \end{cases}$$

Como x, y y z son no nulos, podemos despejar λ en las ecuaciones (E1), (E2) y (E3),

$$\lambda = \overbrace{\frac{x}{y^2z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{2xyz\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}^{2x^2 = y^2} = \frac{z}{xy^2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

de donde obtenemos $2x^2 = y^2$ y $y^2 = 2z^2$, es decir $x = \pm z$ y $y^2 = 2z^2$. Sustituyendo en la ecuación (E4) nos queda $z \cdot 2z^2 \cdot z = 2z^4 = 32$, es decir $z = \pm 2$.

Finalmente, como $y^2 > 0$ y como $xy^2z = 32$ entonces x y z *deben tener el mismo signo,* es decir, $x = z$ y $y = \pm\sqrt{2}\,z$. Tenemos solo cuatro posibles soluciones,

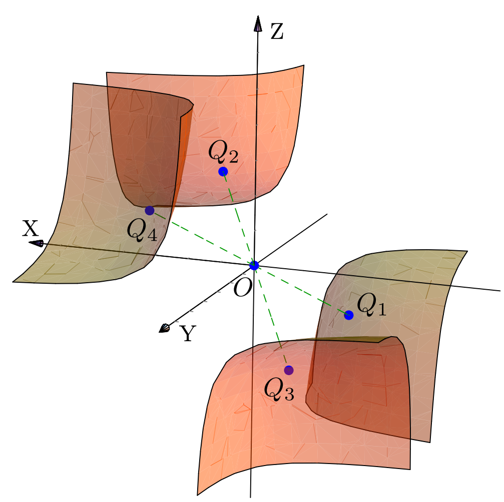
$Q_1 = (2, -2\sqrt{2}, 2)$; $\lambda = 1/8$,

$Q_2 = (2, -2\sqrt{2}, 2)$; $\lambda = 1/8$,

$Q_3 = (-2, 2\sqrt{2}, -2)$; $\lambda = 1/8$,

$Q_4 = (-2, 2\sqrt{2}, -2)$; $\lambda = 1/8$.

Como $d(Q_1, O) = d(Q_2, O) = d(Q_3, O) = d(Q_4, O)$, los cuatro puntos son los puntos de S más cercanos al origen.



8.2.6 R Problema: "Maximizar $\rho = 2 + xz + y^2$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$".

Sea $L(x, y, z, \lambda) = 2 + xz + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$. Factorizando en la ecuación $L_y = 0$ obtenemos los casos $y = 0$ y $\lambda = 1$, y con las ecuaciones $L_x = 0$ y $L_z = 0$ obtenemos los casos $z = 0$ y $\lambda = \pm 1/2$. Resolviedo para estos casos se obtienen los cuatro puntos críticos: $(0,\pm 2,0)$, $(\pm\sqrt{2},0,\pm\sqrt{2}),(\pm\sqrt{2},0,\mp\sqrt{2})$.

Evaluando ρ en los seis puntos encontramos que ρ es máximo en los puntos $(0,\pm 2,0)$ y mínimo en los puntos $(\pm\sqrt{2},0,\mp\sqrt{2})$.

8.2.7 $(0,-1,2)$.

8.2.8 $x = 3/2,\ \ y = 3/2,\ \ \lambda = -3$.

8.2.9 $L(r,h,\lambda) = +2kr^2 + 5hkr - \lambda\left(hkr^2 - 1000\right)$

$r \approx \dfrac{10.7722}{\sqrt[3]{k}},\ h \approx \dfrac{8.61774}{\sqrt[3]{k}}, \lambda \approx 0.464159\sqrt[3]{k}$

8.2.10 $\lambda = 0,\ x = -1,\ y = 0,$

$\lambda = 0,\ x = 1,\ y = 0,$
$\lambda = 0,\ y = -1,\ x = 0,$
$\lambda = 0,\ y = 1,\ x = 0,$
$\lambda = \dfrac{1}{2},\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}},$
$\lambda = \dfrac{1}{2},\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}},$
$\lambda = \frac{1}{2},\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}},$
$\lambda = \dfrac{1}{2},\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$
El valos mínimo es 0 y el valor máximo $\dfrac{1}{4}$.

8.2.11 $(\pm\sqrt{2},1)$ y $\lambda = 1$. Observe que $x = 0$ no satisface la restricción.

8.2.12 Si las dimensiones son x, y para la base y z para la altura, el problema consiste en minimizar $C(x,y,z) = 2xy + 2\cdot 2xz + 4\cdot 2yz$ sujeto a la restricción $V = xyz = 8000$ (entonces $x,\ y,\ z > 0$). Aquí suponemos que las caras de $\$4\text{cm}^2$ eran las de lados y y z.

Si lo resolvemos por Lagrange,

$L(x,y,z,\lambda) = 2xy + 4xz + 8yz - \lambda(xyz - 8000)$

$$\text{Resolvemos}\left\{\begin{array}{lcl} L_x & = & 0 \\ L_y & = & 0 \\ L_z & = & 0 \\ L_\lambda & = & 0 \end{array}\right. \implies x = 40,\ y = 20,\ z = 10 \quad (\text{y } \lambda = 2/5)$$

8.2.13 Sean x el largo, y el ancho y h la altura de la caja. Como se requiere minimizar el costo, la función objetivo es $C(x,y,h) = 18xy + 16xh + 12yh$. La restricción (ligadura) e $V = 16$, es decir. $xyh - 16 = 0$

Así:

$$L(x,y,h,\lambda)=18xy+16xh+12yh-\lambda(xyh-16) \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{lrcl} L_x: & 18y+16h-\lambda yh & = & 0\\ L_y: & 18x+12h-\lambda xh & = & 0\\ L_h: & 16x+12y-\lambda xy & = & 0\\ L_\lambda: & -(xyh-16) & = & 0\end{array}\right.$$

Multiplicando (E1) por x, (E2) por y y (E3) por h, obtenemos

$$\left\{\begin{array}{lrcll} L_x: & 18yx+16hx-\lambda xyh & = & 0 & \text{(E1)}\\ L_y: & 18xy+12hy-\lambda yxh & = & 0 & \text{(E2)}\\ L_h: & 16xh+12yh-\lambda xyh & = & 0 & \text{(E3)}\\ L_\lambda: & xyh & = & 16 & \text{(E4)}\end{array}\right.$$

- Igualando (E1) y (E2) tenemos $18yx+16hx=18xy+12hy \Longrightarrow y=\frac{4}{3}x$ (pues $h\neq 0$, se puede cancelar)
- Igualando (E1) y (E3) tenemos $18yx+16hx=16xh+12yh \Longrightarrow h=\frac{18}{12}x$ (pues $y\neq 0$, se puede cancelar)

Sustituyendo $y=\frac{4}{3}x$ y $h=\frac{18}{12}x$ en (E4) se obtiene $x=2$. Por tanto, $x=2$, $y=\frac{8}{3}$, $h=3$ (y $\lambda=12$)

8.2.14 R Problema: "Maximizar $V(r,h)=\pi r^2 h$ sujeto a $48\pi=2\pi r\,h+\pi r^2$."

- $L(r,h,\lambda)=\pi r^2 h-\lambda(2r\,h+r^2-48)$.
- $$\left\{\begin{array}{lcll} L_r=2\pi rh-\lambda(2h+2r) & = & 0 & (1)\\ L_h=\pi r^2-\lambda 2r & = & 0 & (2)\\ L_\lambda=2r\,h+r^2 & = & 48 & (3)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & \dfrac{\pi rh}{h+r}, \text{ pues } h>0 \text{ y } r>0.\\ \lambda & = & \pi r/2\\ 2r\,h+r^2 & = & 48\end{array}\right.$$

Ahora, $\lambda=\lambda \Longrightarrow \dfrac{\pi rh}{h+r}=\dfrac{\pi}{2}r \Longrightarrow \mathbf{r}(h-r)=0 \Longrightarrow r=h \quad (r>0)$.

Luego, sustituimos $r=h$ en la ecuación (3) :

$2r\,h+r^2=48 \Longrightarrow 2h^2+h^2=48 \Longrightarrow h=\pm 4.$

$\therefore$ Las dimensiones son $h=4$ y $r=4$.

8.2.15 R Problema: "Minimizar $A=3\pi r^2+2\pi rh$ sujeto a la restricción $V=\pi r^2 h+\frac{2}{3}\pi r^3=400$"

La altura total es $h+r\approx 8.49$m y el diámetro es $d\approx 8.49$m

8.2.16 R (*) Se omite

8.2.17 R (*) Se omite

Epílogo: ¿Puede fallar el método de Lagrange?

Cuando las condiciones de primer orden no se cumplen. En general, el método de multiplicadores de Lagrange es muy eficiente, sin embargo los puntos críticos de L no necesariamente son solución del problema de optimización que da origen a L.

Consideremos el problema: Minimizar $f(x,y) = x^3 + y^3$ sujeto a la restricción $g = x - y = 0$.

$(0,0)$ *no* es ni máximo ni mínimo local de f en D pues $\forall\, \epsilon > 0$, $(\epsilon,\epsilon) \in D$ y $(-\epsilon,-\epsilon) \in D$ pero $f(0,0) = 0 > f(-\epsilon,-\epsilon) = -2\epsilon^3$ y $f(0,0) = 0 < f(\epsilon,\epsilon) = 2\epsilon^3$.

Sin embargo $(0,0)$ satisface $\nabla g(0,0) = (1,-1) \neq (0,0)$ y es la única solución (con $\lambda = 0$) del sistema $\nabla L(x,y,\lambda) = 0$,

$$\begin{aligned} L_x &= 3x^2 - \lambda = 0 \\ L_y &= 3y^2 - \lambda = 0 \\ L_\lambda &= x - y = 0 \end{aligned}$$

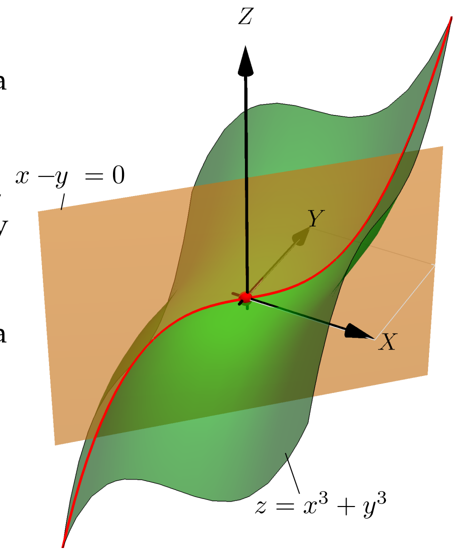


Figura 8.4: $(0,0,0)$ es punto crítico de L pero no es solución del problema

■ **Cuando ∇g se anula.** El método de multiplicadores de Lagrange requiere que ∇g no se anule en los puntos críticos de f sobre D para que el conjunto de puntos críticos de L contenga al conjunto de puntos críticos de f sobre D. Si $\nabla g(x)$ se anula podrían pasar varias cosas de cuidado.

Consideramos el problema de mínimizar la distancia de la curva $(x-1)^3 - y^2 = 0$ al origen, es decir, minimizar $d = \sqrt{x^2+y^2}$ sujeta a $(x-1)^3 - y^2 = 0$. Este problema es equivalente al problema:

$$\text{Minimizar } d = x^2 + y^2 \text{ sujeta a } (x-1)^3 - y^2 = 0.$$

$x = 1$ y $y = 0$ es una solución del problema (como se ve gráficamente), pues este punto está en la curva de restricción y también $(x-1)^3 = y^2$, entonces $(x-1)^3 \geqslant 0 \implies x \geqslant 1$. Por tanto $d(x,y) = x^2 + y^2 \geqslant d(1,0) = 1$.

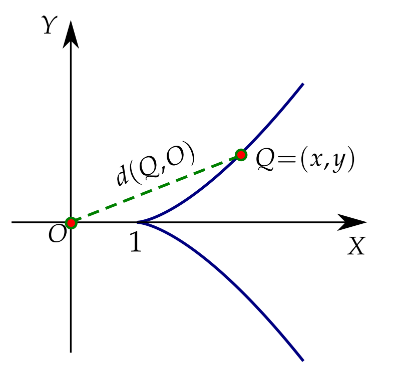


Figura 8.5: La distancia de la curva al origen se minimiza si $x = 1$ y $y = 0$

$(1,0)$ no es punto crítico de L. La lagrangiana sería $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda[(x-1)^3 - y^2]$ y debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3\lambda(x-1)^2 = 0 & \text{(E1)} \\ 2y + 2y\lambda = 0 & \text{(E2)} \\ (x-1)^3 - y^2 = 0 & \text{(E3)} \end{cases}$$

Factorizando en (E2) obtenemos $y = 0$ y $\lambda = -1$. Sustituyendo $y = 0$ en (E3) nos da $x = 1$, pero este valor no es solución pues no satisface (E1). Sustituyendo $\lambda = -1$ en (E1) nos da la cuadrática $3x^2 - 4x + 3 = 0$ que tiene raíces complejas, así que ***el sistema no tiene soluciones*** en $\mathbb{R}$ y los puntos críticos de L no detectan el mínimo local $(1, 0, 1)$

Problema: Maximizar $z = -y$ sujeto a la restricción $y^3 - x^2 = 0$

$(0, 0, 0)$ es un máximo local para este problema pues como $y^3 = x^2$ entonces $y \geqslant 0$ por lo que $z(x, y) = -y \leqslant= 0 = z(0, 0)\ \ \forall\,(x, y) \in D$.

$(0, 0)$ no es punto crítico de $L(x, y, \lambda) = -y - \lambda(y^3 - x^2)$. El sistema $\nabla L = 0$ no tiene solución. El método de multiplicadores de Lagrange no detecta el óptimo.

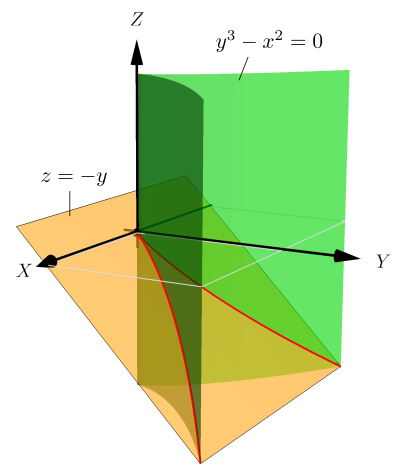


Figura 8.6: Máximo local en $(0, 0, 0)$

Problema: Maximizar $z = 2x^3 - 3x^2$ sujeto a la restricción $(3 - x)^3 - y^2 = 0$

Este problema tiene solo un máximo local cuando $x = 3$ y $y = 0$ pero este máximo no está dentro de los cuatro puntos críticos de L.

El sistema $\nabla L = 0$ tiene cuatro soluciones, todas con $\lambda = 0$,

$(0, \pm 3\sqrt{3}, 0)$,

$(1, \pm 2\sqrt{2}, 0)$

y no detecta el máximo local en $(3, 0)$.

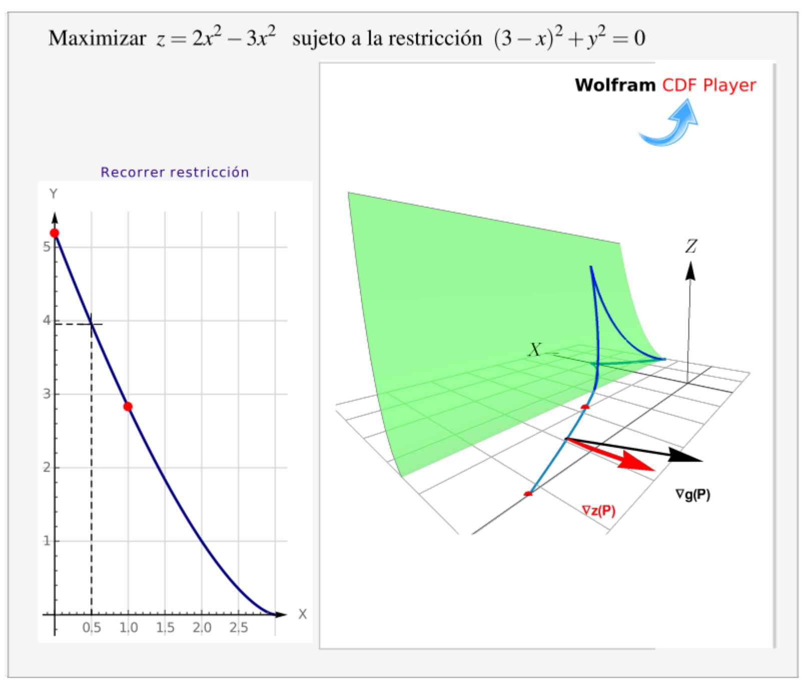


Figura 8.7: Máximo local se alcanza en $(3, 0)$, pero éste no es punto crítico de L

Problema: Mínimo $z = x^2 + y^2$ sujeto a la restricción $x^2 - y^2 = 0$

El mínimo local se alcanza en $(0,0)$ y aunque $\nabla g(0,0)=(0,0)$, ahora sí $(0,0)$ es solución del problema de optimización. En este caso $\nabla f(0,0)=(0,0)$ por lo que trivialmente la ecuación $\nabla f-\lambda\nabla g=0$ tiene infinitas solución $(0,0,\lambda)$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

■ **Multiplicadores de Lagrange vs sustituir la restricción.** Consideremos el problema

$$\text{Optimizar } z=x^2-y^2 \text{ sujeto a la restricción } x^2+y^2=1$$

Con multiplicadores de Lagrange

$L(x,y,\lambda)=x^2-y^2-\lambda(x^2+y^2-1)$

$$\nabla L=0 \implies (x,y,\lambda)=\begin{cases}(0,-1,-1)\\(0,1,-1)\\(1,0,1)\\(-1,0,1)\end{cases}$$

Con una sustitución

Si hacemos la sustitución $y^2=1-x^2$ en $z=x^2-y^2$,

$$z=2x^2-1$$

$$\frac{dz}{dx}=0 \implies (x,y)=\begin{cases}(0,-1)\\(0,1)\end{cases}$$

El método de sustitución funciona si hacemos la otra sustitución $x^2=1-y^2$... pero...

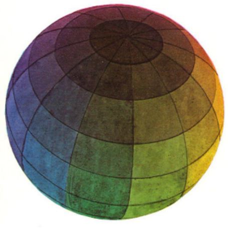
Determinar extremos absolutos. Si el conjunto de puntos A_g donde la restricción g se anula, es cerrado y acotado y si f es continua entonces si hay extremos absolutos en A_g. Formalmente uno obtiene los valores de la función en los puntos críticos y los compara con los valores de la función en la frontera de A_g y así obtiene los extremos absolutos.

Los puntos críticos los detectamos usando el método de multiplicadores de Lagrange, pero también a veces hay extremos excepcionales en A_g en los que el gradiente de f o el de g se indefinen o puntos donde el gradiente de g se anula como el ejemplo anterior.

Máximos y mínimos locales en varias variables.

Puede leer sobre este tema en W. Mora. "Cálculo en varias variables. Visualización Interactiva o también en cualquier libro de optimización no lineal

Citar como:
Walter Mora F. *Cálculo en Varias Variables. Visualización interactiva.* (2019) 2da ed. [ebook] Cartago, Costa Rica. Revista digital, Matemática, Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/.



Revisado: Julio, 2022
Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF: https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

http://www.matematicainteractivacr.com/