Semana 8: Integrales dobles I

Integrales dobles: Introducción

Revista de Matemática/Libros
W. Mora. "Cálculo en Varias Variables."

Contenido

■

8.1 Introducción: Sumas de Riemann en una variable

Particiones de $[a,b]$. Una *partición* P en n subintervalos del intervalo $[a,b]$, es una colección $\{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$ tal que $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$ y $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k] = [a,b]$. Se denota con $||P||$ la "norma" de la partición.

$$||P|| = \max_{k=1,...,n} |x_{k-1} - x_k|$$

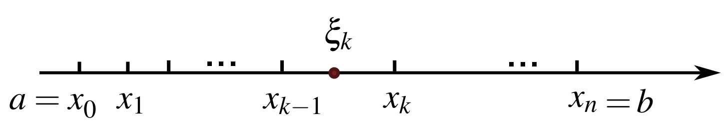


Figura 8.1: Partición del intervalo $[a,b]$

Sea f una función definida en el intervalo $[a,b]$. Una *suma de Riemann* de f respecto a una partición $P = \{x_0, ...x_n\}$, es una suma de la forma

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

con $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ y $\Delta x_k = |x_{k-1} - x_k|$.

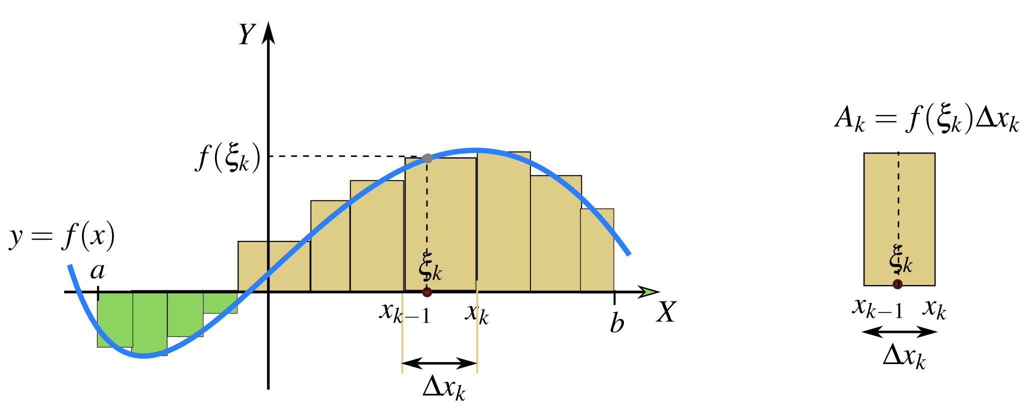


Figura 8.2: Suma de Riemann respecto a la partición P

Observe que $A_k = f(\xi_k)\Delta x_k$ puede ser negativo si $f(\xi_k) < 0$.

Teorema 8.1 (Integral de Riemann)

Sea f una función definida en $[a,b]$. Si existe un número I para el que dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, siempre que $n \geqslant N$ y ξ_k es escogido arbitrariamente en cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, con $x_k = a + k(b-a)/n$, se cumple

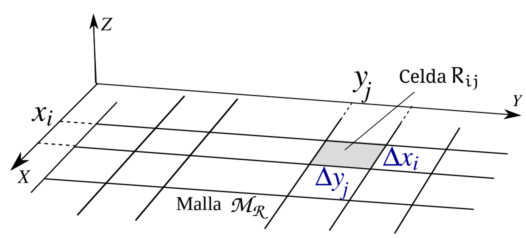
$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \frac{b-a}{n} - I \right| < \varepsilon$$

entonces f es integrable en el sentido Riemann. En este caso tenemos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = I \iff I = (b-a) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(\xi_k)}{n}$$

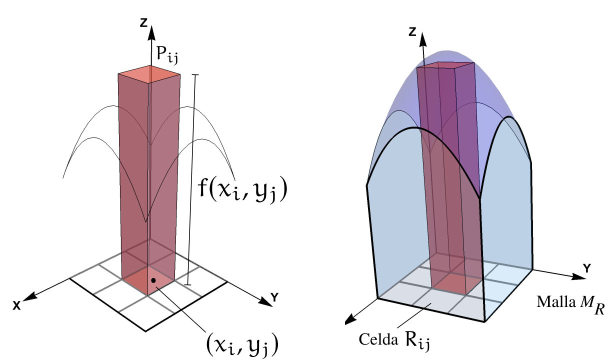
8.2 Integral doble

Sea $R = [a,b]\times[c,d]$, y sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida y acotada sobre R. Supongamos que $M_R = \{R_{11}, R_{12}, ...R_{nm}\}$ es un conjunto de nm *rectángulos* que conforman una *malla* que cubre R (ver figura). El área de cada celda R_{ij} la denotamos con ΔA_{ij}. La malla M_R es el conjunto de rectángulos $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}]\times[y_j, y_{j+1}]$ de área $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$.



Una *suma de Riemann* de f sobre R es una expresión de la forma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\Delta A_{ij}$ donde $(x_i, y_j) \in R_{ij}$.

Si f es continua y positiva sobre R, entonces $f(x_i, y_j)\Delta A_{ij}$ aproxima el volumen de cada paralelepípedo P_{ij} de base R_{ij} y altura $f(x_i, y_j)$; en este caso la *suma de Riemann* aproxima el volumen del sólido entre la región R y el gráfico de f.



Diámetro de la malla. El *diámetro* de cada celda R_{ij} es la máxima distancia entre todas las distancias entre cualesquiera dos puntos en R_{ij} y se denota $||R_{ij}||$. El *diámetro* de la malla M_R es $||M_R|| = \text{Sup}_i\{||R_{ij}||\}$. Conforme $||M_R|| \longrightarrow 0$, el área de cada celda tiende a cero, es decir, $\Delta A_{ij} \longrightarrow 0$ y la cantidad de celdas se hace infinitamente grande: $n \longrightarrow \infty$.

Volumen. Si f es continua y no negativa en la región R, entonces e siguiente límite existe,

$$V_Q = \lim_{||M||\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i,y_j)\Delta A_{ij} \quad \text{con } \; nm = \text{Card}(M)$$

y V_Q es el volumen de sólido Q, limitado por la región R y la superficie $S: \; z = f(x,y)$. El límite se toma sobre todas las posibles mallas rectángulares M_R con (x_i,y_j) cualquier punto de R_{ij}.

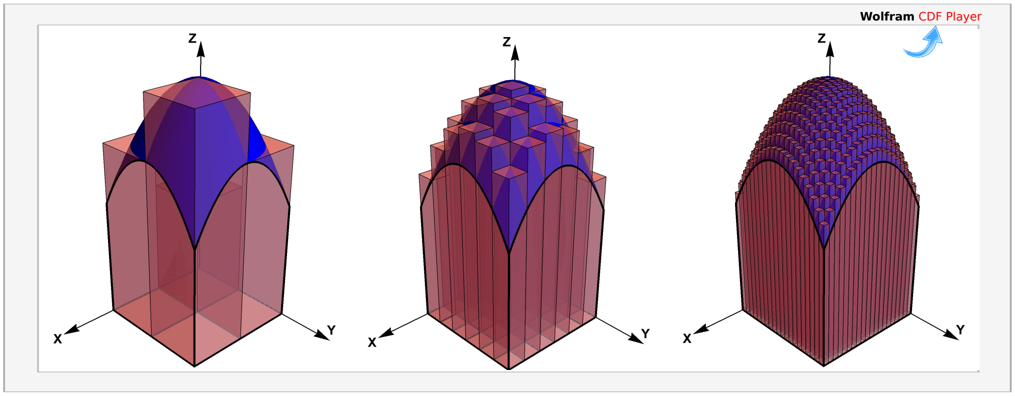


Figura 8.3: Aproximación del volumen de un sólido con sumas de Riemann

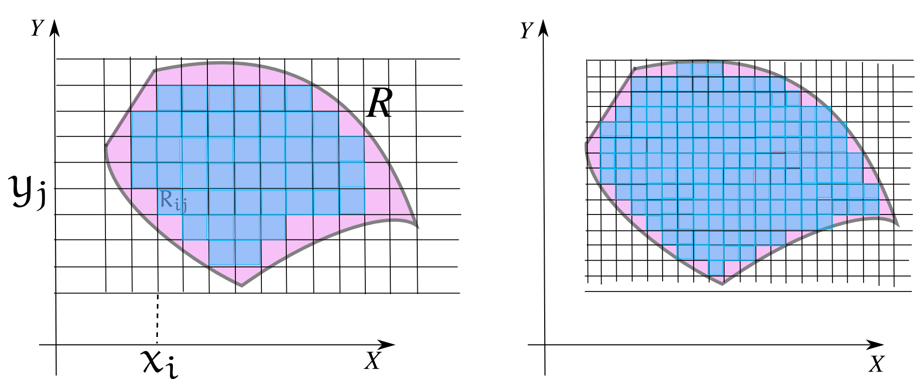
Caso general. Si la región R es una región cerrada y acotada y f es no negativa y está definida y es acotada sobre R, entonces usamos una malla de rectángulos R_{ij}, contenidos en la región R, de área ΔA_{ij} contenidos en R. Si f es no negativa en la región R, entonces el volumen V del sólido Q limitado por R y la superficie $S: \; z = f(x,y)$ se aproxima con

$$V \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i,y_j)\Delta A_{ij}$$

siendo $\Delta A_k = \Delta x_k \, \Delta y_k$.

Suponiendo que f es continua sobre R y que la región R está limitada por una curva suave a trozos (con un número finito de trozos), entonces conforme $||M_R|| \longrightarrow 0$, el área de cada celda tiende a cero, es decir, $\Delta A_k \longrightarrow 0$ y la cantidad de celdas se hace infinitamente grande $(n \longrightarrow \infty)$ y la unión de los rectángulos R_{ij} se va ajustando a la región R conforme $||M_R|| \longrightarrow 0$. El volumen de Q se obtiene como

$$\lim_{||M||\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i,y_j)\Delta A_{ij} \text{ con } nm = \text{Card}(M)$$



El límite se toma sobre todas las mallas M_R y con (x_k,y_k) cualquier punto de R_k. La generalización de estas ideas no requiere que f sea no negativa, solo requiere que el límite anterior exista.

Definición 8.1 (Función integrable).

Si las sumas de Riemann de f tienen un límite (que se toma sobre todas las posibles mallas rectángulares M_R contenidas en la región R) independiente de la escogencia de los (x_i, y_j), conforme $||M_R|| \to 0$, entonces decimos que f es *integrable* sobre R y que la integral es este límite. En este caso escribimos,

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{||M||\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i,y_j)\Delta x_i \Delta y_j \text{ con } nm = \text{Card}(M)$$

Las propiedades de las funciones integrables en dos variables son similares a las propiedades de las funiones integrables en una variable.

Teorema 8.2 (Propiedades de la funciones integrables).

a.) Si f es continua sobre R, entonces f es integrable sobre R.

b.) Sea $k \in \mathbb{R}$. Si f y g son integrables sobre R, entonces kf y $f \pm g$ son integrables sobre R y

$$\iint_R kf(x,y)\,dA = k\iint_R f(x,y)\,dA \quad \text{y} \quad \iint_R f(x,y)\pm g(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA \pm \iint_R g(x,y)\,dA$$

c.) Si f y g son integrables sobre regiones R y S que no se traslapan, entonces f es integrables sobre $R \cup S$ y

$$\iint_{R\cup S} f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_S f(x,y)\,dA$$

d.) Si f y g son integrables sobre R y $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ para todo $(x,y) \in R$, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA \leqslant \iint_R g(x,y)\,dA$$

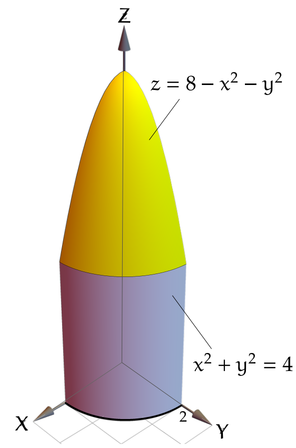
e.) Si f es integrable sobre R y $M \leqslant f(x,y) \leqslant m$ para todo $(x,y) \in R$, entonces

$$m\,A(R) \leqslant \iint_R f(x,y)\,dA \leqslant M\,A(R)$$

Otros tipos de integración. El concepto de integral que hemos visto es el concepto de integral en el sentido de Riemann y es suficiente para los cálculos y las aplicaciones en este curso. Para otros propósitos esta integral no es adecuada y se requiere definir un tipo más general de integración, por ejemplo la integral en el sentido Lebesgue, integral de Riemann-Stieltjes, integral de Henstock-Kurzweil, etc.

Ejemplo 8.1

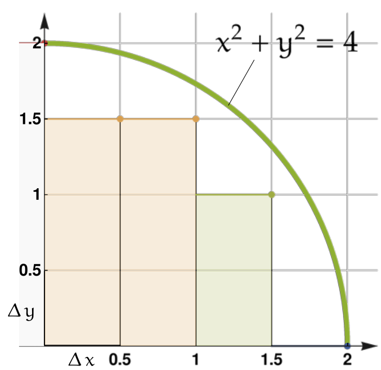
Consideremos el sólido Q limitado por la superficie $S_1 : z = 8 - x^2 - y^2$ y el cilindro $S_2 :\ x^2 + y^2 - 4$ en el primer octante, tal y como se muestra en la figua de la derecha. La región de integración R sería el cuarto de círculo de radio 2 en el primer cuadrante.

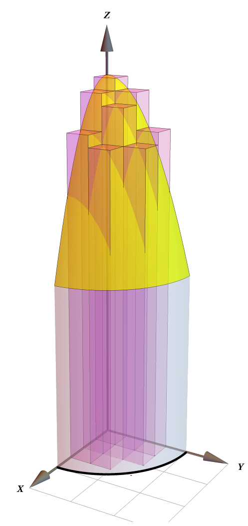


La función $f(x, y) = 8 - x^2 - y^2$ es integrable en esta región R. Podemos aproximar el volumen del sólido Q usando la aproximación

$$\iint_R f(x,y)\,dA \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\Delta A_{ij}$$

Usando $\Delta x = \Delta y = 0.5,$ tendríamos una malla de 8 rectángulos, cada uno de área 0.5^2.





Calculamos $f(x_i, y_j)$ para cada $x_i = i \cdot 0.5,\ y_i = i \cdot 0.5$ en la malla

x_i	y_i	$f(x_i,y_j)$	x_i	y_i	$f(x_i,y_j)$	x_i	y_i	$f(x_i,y_j)$	x_i	y_i	$f(x_i,y_j)$
0.5	0.5	7.5	0.5	1.	6.75	0.5	1.5	5.5			
1.	0.5	6.75	1.	1.	6.	1.	1.5	4.75			
1.5	0.5	5.5	1.5	1.	4.75						

Entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA \approx f(x_1,y_1)\Delta A_{11} + f(x_1,y_2)\Delta A_{12} + \ldots + f(x_1,y_3)\Delta A_{13}$$

$$\begin{aligned} V_Q = \iint_R f(x,y)\,dA &\approx 7.5 \cdot 0.25 + 6.75 \cdot 0.25 + 5.5 \cdot 0.25 + 6.75 \cdot 0.25 \\ &\quad +6 \cdot 0.25 + 4.75 \cdot 0.25 + 5.5 \cdot 0.25 + 4.75 \cdot 0.25 \\ &\approx 11.875 \end{aligned}$$

Por supuesto, esta aproximación no es muy buena. Se requiere una malla más fina para llegar cerca de $V_Q = 8\pi - 4 \approx 21.1327$.

Por ejemplo con $\Delta x = \Delta y = 0.2$, se obtiene $V_Q \approx 16.2912$ y con $\Delta x = \Delta y = 0.05$, se obtiene $V_Q \approx 18.179$

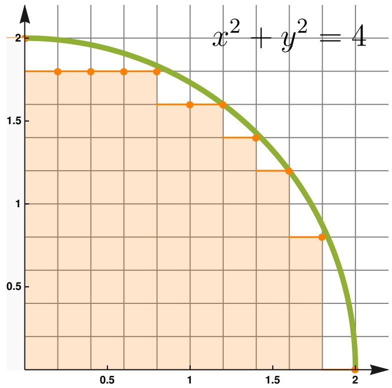


Figura 8.4: Malla con $\Delta x = \Delta y = 0.2$

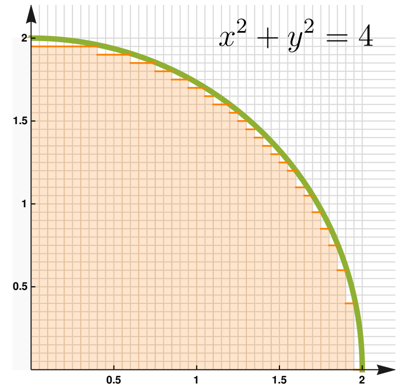


Figura 8.5: Malla con $\Delta x = \Delta y = 0.05$

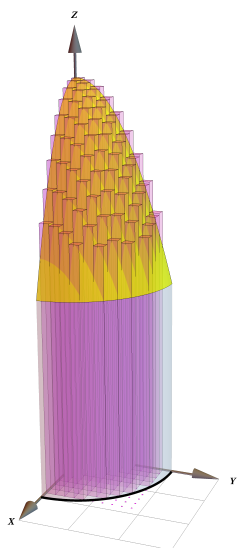


Figura 8.6: Malla con $\Delta x = \Delta y = 0.2$

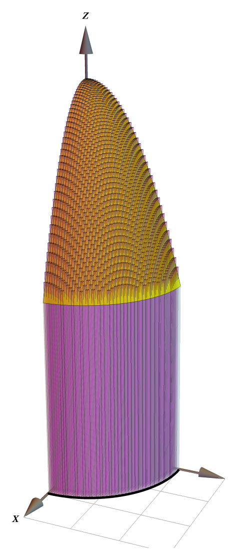


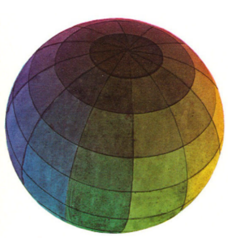
Figura 8.7: Malla con $\Delta x = \Delta y = 0.05$

8.3 Ejercicios

En este folleto no hay ejercicios.

Citar como:

Walter Mora F. *Cálculo en Varias Variables. Visualización interactiva.* (2019) 2da ed. [ebook] Cartago, Costa Rica. Revista digital, Matemática, Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/.



Revisado: Julio, 2022

Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF: https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

http://www.matematicainteractivacr.com/