Instituto Tecnológico de Costa Rica
TEC| ESCUELA DE MATEMÁTICA CÁLCULO SUPERIOR

Semana 7: Plano tangente

Derivadas Parciales: Recta tangente, recta normal y plano tangente

Revista de Matemática/Libros
W. Mora. "Cálculo en Varias Variables."

Contenido

7.1 Introducción: Parametrización de una curva

Desde el punto de vista de la física, el movimiento de una partícula en el espacio se puede describir por su posición (x, y, z) en función del tiempo t, es decir, $(x(t), y(t), z(t))$. El vector posición en el tiempo t se denota $\mathbf{r}(t)$,

$\mathbf{r}(t) = (\,x(t),\; y(t),\; z(t)\,)$ o también $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{\imath}} + y(t)\,\hat{\mathbf{\jmath}} + z(t)\,\hat{\mathbf{k}}$, donde $t \in [a, b]$

En el plano XY sería $\mathbf{r}(t) = (\,x(t),\; y(t)\,)$ o también $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{\imath}} + y(t)\,\hat{\mathbf{\jmath}}$

La "función vectorial" $\mathbf{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se puede considerar como una trayectoria de una partícula en movimiento tanto como una curva, es decir, un objeto geométrico. En este último caso, el "parámetro" t ya no representa necesariamente "tiempo"

Definición 7.1 (Trayectoria. Parametrización de una curva).

Una *trayectoria* C en $\mathbb{R}^n$ es una función continua $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Si la función vectorial $\mathbf{r}$ es continua en un intervalo I, entonces a la representación gráfica de $\mathbf{r}$ se le llama *curva* y decimos que esta curva esta descrita paramétricamente por $\mathbf{r}(t)$. Escribimos

$$C : \; \mathbf{r}(t) \;\text{ con }\; t \in I$$

No hemos solicitado que $\mathbf{r}$ sea inyectiva, soreyectiva, etc. En las aplicaciones es donde establecen qué propiedades debe tener la función $\mathbf{r}$: inyectiva, sobreyectiva, continua, derivable, derivada no nula, etc.

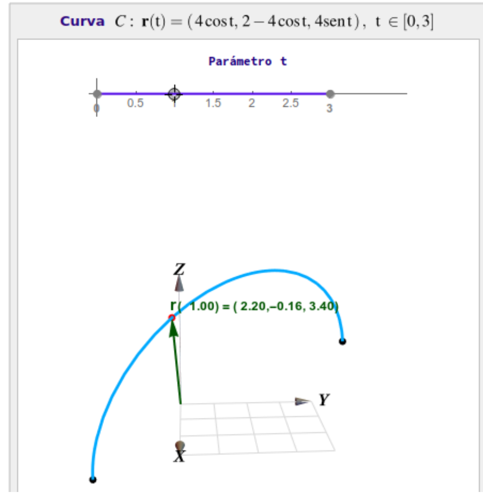
Ejemplo 7.1

Consideremos la trayectoria

$$\mathbf{r}(t) = (\,4\cos t,\; 2 - 4\cos t,\; 4\,\text{sen}\, t\,)\; t\; \in\; [0,3]$$

Observe que,

$$\begin{cases} \mathbf{r}(0) & = & (\,4\cos 0,\; 2-4\cos 0,\; 4\,\text{sen}\, 0\,) \;=\; (4,-2,0) \\ \mathbf{r}(\pi/2) & = & (0,2,4) \end{cases}$$



Vector tangente. Sea C es una trayectoria continua parametrizada por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. En en el intervalo de tiempo que va de t a $t + \Delta t$, una partícula que recorre C, se mueve de la posición $\mathbf{r}(t)$ a $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ y la velocidad promedio es

$$\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

Si la velocidad promedio tiene un límite, cuando $\Delta t \longrightarrow 0$, entonces este límite lo llamamos la *velocidad* (instantánea) de la partícula en el tiempo t y se denota $\boldsymbol{v}(\mathbf{t})$.

$$\boldsymbol{v}(\mathbf{t}) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \;=\; \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

El vector veclocidad *es tangente* a C en $\mathbf{r}(t)$ y apunta en la dirección del movimiento. La longitud de $\boldsymbol{v}(t)$, denota $v(t) = ||\boldsymbol{v}(t)||$, se llama *rapidez* de la partícula.

Definición 7.2

Sea C es una curva parametrizada por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ con $t \in [a,b]$. Decimos que $\mathbf{r}$ es *diferenciable* en t si

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad \text{existe}$$

La curva C se dice *suave* en I si $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ es continua, y no se anula, en todo I

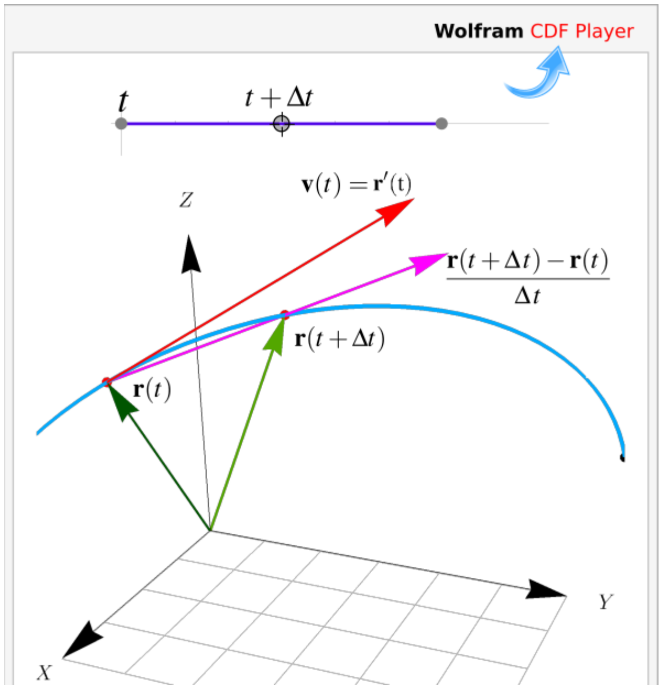


Figura 7.1: Vector velocidad $\boldsymbol{v}(\mathbf{t}) = \dfrac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$

Casos particulares.

a.) Si $x(t)$ y $y(t)$ son funciones derivables en I y si $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath}$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\,\hat{\imath} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\,\hat{\jmath} \\
&= x'(t)\,\hat{\imath} + y'(t)\,\hat{\jmath}
\end{aligned}$$

Es decir $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\hat{\imath} + y'(t)\,\hat{\jmath}$

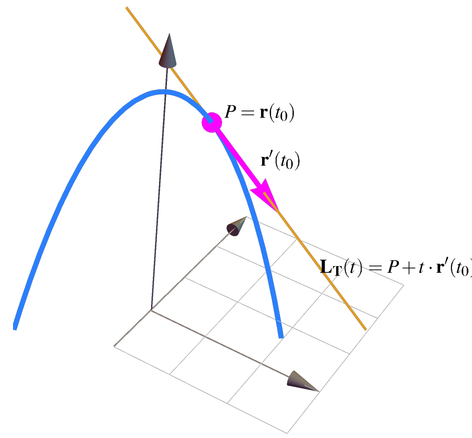
b.) Si $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son funciones derivables en I y si $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{\mathbf{k}}$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\,\hat{\imath} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\,\hat{\jmath} + \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\,\hat{\mathbf{k}} \\
&= x'(t)\,\hat{\imath} + y'(t)\,\hat{\jmath} + z'(t)\,\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Es decir $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\hat{\imath} + y'(t)\,\hat{\jmath} + z'(t)\,\hat{\mathbf{k}}$

Si $C:\ \mathbf{r}(t)$ es una *curva suave*, entonces el vector $\mathbf{r}'(t_0)$ es tangente a la curva en cada punto $P=\mathbf{r}(t_0)$. Además, una ecuación de la recta tangente a la curva en P es

$$\mathbf{L_T}(t)=P+t\cdot\mathbf{r}'(t_0)$$



Ejemplo 7.2

Consideremos la curva C de intersección entre la superficie $z=4-x^2-y^2$ y el plano $x+y=2$. Una parametrización de C es

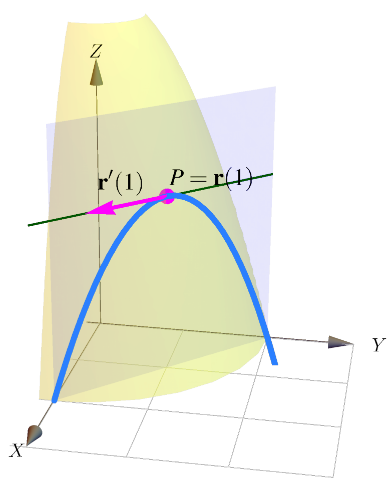
$$C:\ r(t)=(t,\ 2-t,\ 4-t^2-(2-t)^2)$$

El punto $P=\mathbf{r}(1)=(1,1,2)$ está en esta curva. Un vector tangente a C en P es

$\mathbf{r}'(1)=(1,-1,0)$

Una ecuación de la recta tangente a la curva en P es

$\mathbf{L_T}(t)=P+t\cdot\mathbf{r}'(t_0)$



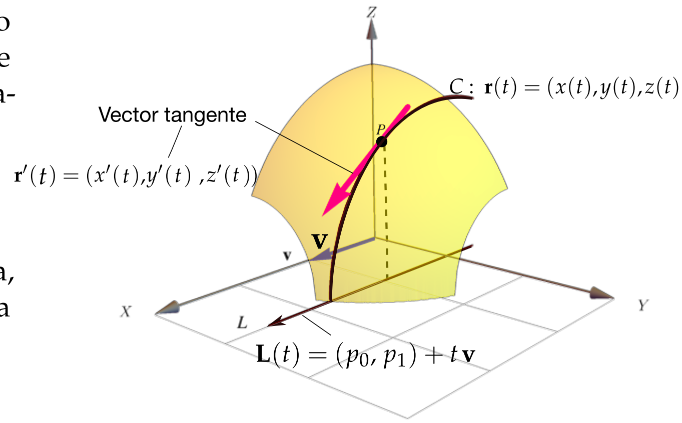
7.2 Plano tangente, rectas tangentes y un vector normal.

Recta tangente "en la dirección" de $\boldsymbol{v}$. Sea S una superficie suave de ecuación $S: \ z = f(x,y)$. Como vimos en la introducción a las parametrizaciones de una curva, si una curva C, contenida en S, está parametrizada como

$$\mathbf{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(x(t),y(t)))$$

entonces, si tenemos un punto cualquiera es esta curva, digamos, $Q = \mathbf{r}(t)$, entonces un vector tangente a esta curva en P es

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t),\ y'(t),\ \nabla z(P)\cdot(x'(t),\ y'(t)\ )$$



La recta tangente a $S: \ z = f(x,y)$ en $P = (p_0,p_1,p_2) \in S$, "en la dirección de $\boldsymbol{v} = (v_0,v_1)$" se refiere a la recta tangente, en P, a la curva C de intersección entre la superficie S y el plano generado por la recta

$$\mathbf{L}(t) = (p_0,p_1) + t\cdot(v_0,v_1)$$

Como $x = x(t) = p_0 + t\,v_0$ y $y = y(t) = p_1 + t\,v_1$, la curva C tiene ecuación paramétrica

$$C: \ \mathbf{r}(t) = (p_0 + t\,v_0,\ p_1 + tv_1,\ z(x,\ y)) \quad \text{con} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & p_0 + t\,v_0 \\ y & = & = p_1 + t\,v_1 \\ P & = & \mathbf{r}(0) \end{array}\right.$$

Entonces: como $P = \mathbf{r}(0)$, un vector tangente en P "en la dirección de $\boldsymbol{v} = (v_0,v_1)$" es

$$\mathbf{r}'(0) = (v_0,\ \ v_1, \nabla z P)\cdot(v_0,v_1))$$

Por tanto una ecuación vectorial de la recta tangente en P "en la dirección de $\boldsymbol{v}$" sería

$$\mathbf{L_T}(t) = P + t\cdot\mathbf{r}'(0), \quad \text{es decir,} \quad \mathbf{L_T}(t) = P + t\cdot(v_0,\ \ v_1, \nabla z(P)\cdot(v_0,v_1))$$

Podemos multiplicar $\mathbf{r}'(0)$ por $1/||\boldsymbol{v}||$ si queremos que esta ecuación quede en términos de la derivada direccional,

$$L_{\boldsymbol{v}}(t) = P + t\cdot\frac{\mathbf{r}'(0)}{||\boldsymbol{v}||} \ = \ P + t\cdot\left(\frac{v_0}{||\boldsymbol{v}||},\ \frac{v_1}{||\boldsymbol{v}||},\ D_{\boldsymbol{v}}z(P)\right)$$

Rectas tangentes en la dirección de $\boldsymbol{v}$

Si S tiene ecuación $z = f(x,y)$ con f diferenciable, entonces una ecuación paramétrica de la recta tangente a $P = (p_0,p_1,p_2)$ en la dirección del eje X se obtiene tomando $\boldsymbol{v} = (1,0)$ y una ecuación paramétrica de la recta tangente a P en la dirección del eje Y se obtiene tomando $\boldsymbol{v} = (0,1)$

- $L_X(t) = P + t\cdot(1,\ 0,\ z_x(P))$ o $L_X(x) = (x, p_1, p_2 + (x - x_0)f_x(p_0,\ p_1))$
- $L_Y(t) = P + t\cdot(0,\ 1,\ z_y(P))$ o $L_y(x) = (p_0, y, p_2 + (y - p_1)f_y(p_0,\ p_1))$

- La recta tangente en P, en dirección de $v \in \mathbb{R}^2$ es

$$\mathbf{L}_v(t) = P + t \cdot (v_0,\ v_1,\ \boldsymbol{\nabla}\, z(P) \cdot (v_0, v_1))$$

o, en términos de la derivada direccional, $\mathbf{L}_v(t) = P + t \cdot \left(\dfrac{v_0}{||v||},\ \dfrac{v_1}{||v||}, D_v z(P) \right)$

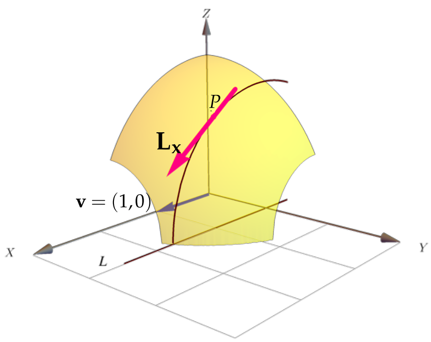


Figura 7.2: $v = (1, 0)$

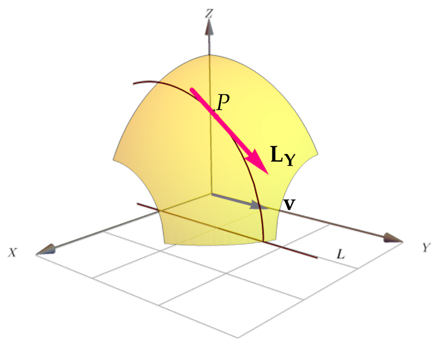


Figura 7.3: $v = (0, 1)$

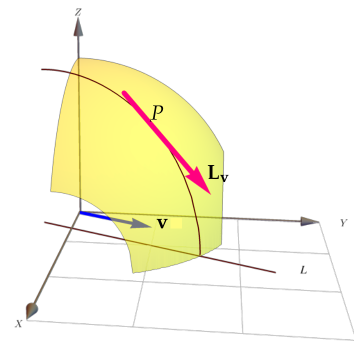


Figura 7.4: $v = (v_0, v_1)$

Un Vector normal. Sea $S:\ z = f(x, y)$ una superficie suave y $P \in S$. Del párrafo anterior sabemos que dos vectores tangentes a S en P son $(1,\ 0,\ z_x(P))$ y $(0,\ 1,\ z_y(P))$, entonces un vector normal a S en P es

$$\mathbf{N}(P) = (1,\ 0,\ z_x(P)) \times (0,\ 1,\ z_y(P)) = \big(-f_x(P), -f_y(P), 1\big)$$

Si tenemos $S:\ G(x, y, z) = 0$, entonces usamos derivación implícita y (si $G_z(P) \neq 0$)

$$\mathbf{N}(P) = \big(-z_x(P), -z_y(P), 1\big) = \left(\frac{G_x}{G_z},\ \frac{G_y}{G_z},\ \frac{G_z}{G_z} \right)$$

Como solo nos interesa la dirección, podemos tomar $\mathbf{N}(P) = \big(G_x(P),\ G_y(P),\ G_z(P)\big)$ como un vector normal.

Un vector normal

No hay un solo vector normal, aunque todos tienen la misma dirección, el tamaño puede variar.

- Si S tiene ecuación $z = f(x, y)$ entonces si ponemos $G(x, y, z) = z - f(x, y)$, un vector normal es
$$\mathbf{N} = (-z_x,\ -z_y, 1)$$
- Si S está definida de manera implícita por $G(x, y, z) = 0$, entonces un vector normal es

$$\mathbf{N_1} = \nabla G = \big(G_x,\ G_y,\ G_z\big) \text{ o también } \mathbf{N_2} = \left(\frac{G_x}{G_z},\ \frac{G_y}{G_z},\ 1 \right) = \frac{1}{G_z}\big(G_x,\ G_y,\ G_z\big) \text{ si } G_z \neq 0.$$

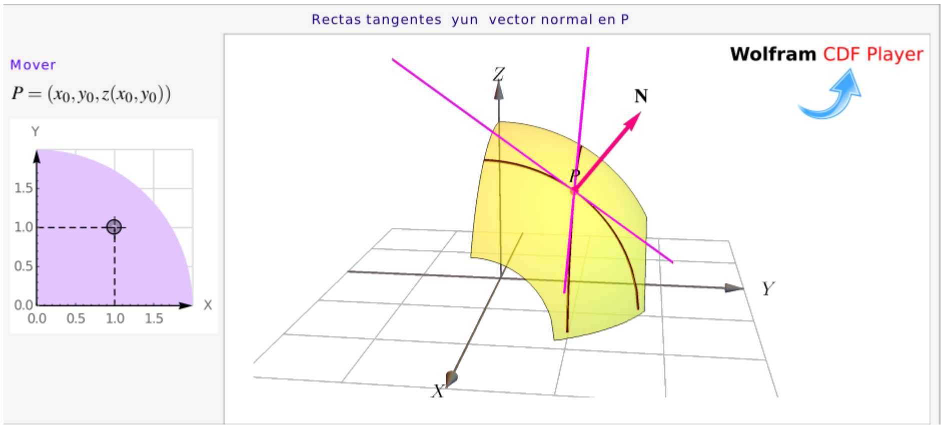


Figura 7.5: Tangentes y un vector normal a S en P.

Ecuación cartesiana del plano tangente. Podemos obtener la ecuación cartesiana del plano tangente (si existiera) usando un vector normal a la superficie S. Como ya vimos, si $S: \ G(x,y,z)=0,$ entonces un vector normal a S en $P \in S$ es

$$\mathbf{N}(P) = \nabla G(P)$$

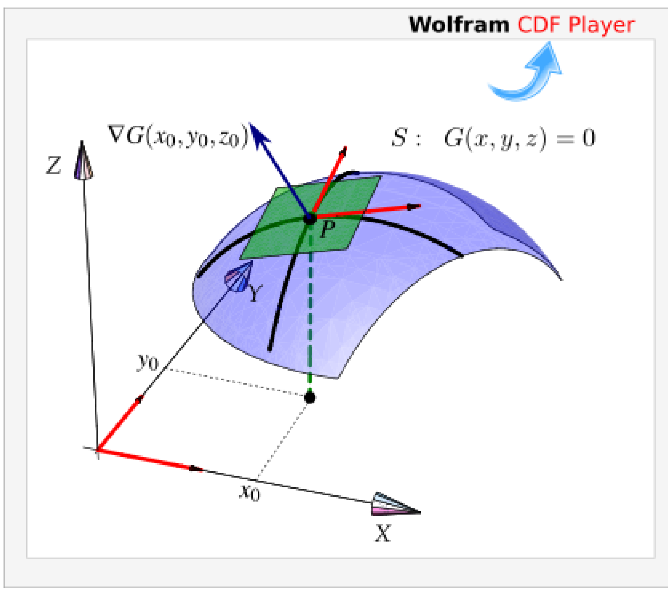


Figura 7.6: $\nabla\mathbf{G}(P)$ es perpendicular (al plano tangente) a S en P.

Así, una ecuación del plano tangente en $P \in S$ es

$$ax+by+cz=d \quad \text{con} \quad (a,b,c)=\nabla\mathbf{G}(P) \quad \text{y} \quad d=\nabla\mathbf{G}(P)\cdot P.$$

Plano Tengente

- Si la superficie S tiene ecuación $G(x,y,z) = 0$ con G diferenciable, el plano tangente en $P \in S$ tiene ecuación cartesiana

$$G_x(P)\,x \ + \ G_y(P)\,y \ + \ G_z(P)\,z = \nabla\mathbf{G}(P)\cdot P$$

- Si S tiene ecuación $z = f(x,y)$ con f diferenciable, entonces $G(x,y,z) = z - f(x,y)$ y $\nabla\mathbf{G}(P) = (-z_x(P), -z_y(P), 1)$, por tanto el plano tangente en $P = (p_0, p_1, p_2) \in S$ tiene ecuación cartesiana

$$\begin{aligned} G_x(P)\,x + G_y(P)\,y + G_z(P)\,z &= \nabla\mathbf{G}(P)\cdot P \\ z_x(P)\,x + z_y(P)\,y + z &= (-z_x(P), -z_y(P), 1)\cdot(p_0, p_1, p_2) \end{aligned}$$

Es decir,

$$z_x(P)\,(x-p_0) + z_y(P)\,(y-p_1) = z - p_2$$

Ejemplo 7.3

Sea S la superficie de ecuación $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$. Aunque $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, no hay plano tangente pues la función es discontinua en este punto (aunque esté definida).

Ejemplo 7.4

Sea S una superficie de ecuación $z = \ln(x^2+y^2) + x(y+3)$ y $P = (1,0,3) \in S$.

a.) Determine una ecuación de la recta tangente en la dirección del eje X, es decir, en la dirección de $\mathbf{v} = (1,0)$.

b.) Determine una ecuación de la recta tangente en la dirección $\mathbf{v} = (-1,3)$.

c.) Determine una ecuación cartesiana del plano tangente a S en P

Solución: Podemos usar las ecuaciones que indicamos más arriba.

a.) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2} + y + 3$ y $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_Q = 5$. Entonces una ecuación de la recta tangente en la dirección del eje X es

$$\mathbf{L}_x(t) = P + t\cdot(1,\ 0,\ 5)$$

b.) Como $\nabla z = \left(\dfrac{2x}{x^2+y^2} + y + 3,\ \dfrac{2y}{x^2+y^2} + x\right)$, entonces, una ecuación de la recta tangente en la dirección $\mathbf{v} = (-1,3)$ es

$$\mathbf{L}_v(t) = P + t\cdot(-1,\ 3,\ \nabla z(1,0)\cdot(-1,3)) = P + t\cdot(-1,\ 3,\ (5,1)\cdot(-1,3)) = P + t\cdot(-1,\ 3,\ -2)$$

o, en términos de la derivada direccional,

$$\mathbf{L}_v(t) = P + t\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-2}{10}\right)$$

c.) Si $G(x,y,z) = z - \ln(x^2+y^2) - x(y+3)$ entonces $\nabla G = \left(-\dfrac{2x}{x^2+y^2} + y + 3,\ -\dfrac{2y}{x^2+y^2} + x,\ 1\right)$.
Un vector normal es $\mathbf{N} = (-5,-1,1)$. Una ecuación cartesiana del plano tangente a S en Q es

$$-5x - y + z = (-5,-1,1)\cdot(1,0,3) = -2$$

Ejemplo 7.5

Sea S la superficie de ecuación $z = x^2 + 2y^2$. Obtener una ecuación cartesiana del plano tangente a S en $P = (1,1,3)$.

Solución:

Primera manera. En este caso $z_x(x,y) = 2x$ y $z_y(x,y) = 4y$. Entonces una ecuación cartesiana sería,

$$z_x(1,1)\,(x-1) + z_y(1,1)\,(y-1) \;=\; z-3,$$

es decir,

$$2(x-1) + 4\,(y-1) \;=\; z-3,$$

Otra manera. Sea $S:\ G(x,y,z) = z - x^2 - 2y^2 = 0$. Entonces un vector normal al plano tangente a S en P es $\nabla\mathbf{G} = (-2x,\ -4y,\ 1)$. Ahora, $\nabla\mathbf{G}(1,1,3) = (-2,-4,1)$, entonces una ecuación del plano tangente es

$$\begin{aligned} -2x-4y+1z &= \nabla\mathbf{G}(1,1,3)\cdot P \\ &= -3 \end{aligned}$$

Ejemplo 7.6

Consideremos la superficie S de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 1$. Sea $P = (1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}) \in S$. Calculemos la ecuación cartesiana del plano tangente en P.

- La ecuación de S es $G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$.
- $\nabla\mathbf{G}(x,y,z) = (2x,\ 2y,\ 2z)$.
- $N = \nabla\mathbf{G}(P) = (2/\sqrt{3},\ 2/\sqrt{3},\ 2/\sqrt{3})$ y $d = P\cdot\nabla\mathbf{G}(P) = 2$
- Una ecuación cartesiana del plano tangente: $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,x + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,y + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,z = 2$ o también $x+y+z = \sqrt{3}$.

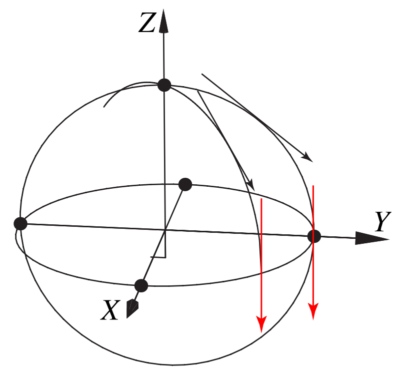
Ejemplo 7.7

Consideremos la superficie S de ecuación $x^2+y^2+z^2=1.$ y $P=(0,\,1,\,0)\in S.$ Calcule la ecuación del plano tangente a S en $P.$

Solución: Sea $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1.$ Entonces $\nabla G(x,y,z)=(2x,\ 2y,\ 2z).$ Por tanto un vector normal es $N=G(0,\,1,\,0)=(0,\,2,\,0)$

La ecuación cartesiana del plano tangente a S en P es $0\cdot x+2\cdot y+0\cdot z=2,$ es decir $y=1.$

Observe que en este punto, como $\nabla z(x,y)=\left(-\dfrac{x}{z},-\dfrac{x}{z}\right)$, la derivada direccional no existe.



Ejemplo 7.8

Consideremos la superficie S de ecuación $x^2+y^2+z^2=1.$ Encuentre los puntos $Q=(a,b,c)\in S$ tal que el plano tangente en Q sea paralelo al plano $2x-y+3z=1.$

Solución: Q tiene tres incógnitas así que necesitamos, en principio, tres ecuaciones.

- Como $Q\in S,$ esto nos da una ecuación: $a^2+b^2+c^2=1.$

- Como el plano tangente en Q es paralelo al plano $2x-y+3z=1,$ sus vectores normales deben ser paralelos, es decir

$$\nabla G(Q)=\lambda\,(2,-1,3)$$

  esto nos da tres ecuaciones adicionales y una incógnita más, $\lambda.$

- Para encontrar Q solo debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 &= 1 \\ \nabla G(Q) &= \lambda\,(2,-1,3)\end{cases}$$

  es decir,

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 &= 1 \\ (2a,2b,2c) &= \lambda\,(2,-1,3) \end{cases} \implies \begin{cases} a^2+b^2+c^2 &= 1 \\ 2a &= 2\lambda \\ 2b &= -\lambda \\ 2c &= 3\lambda \end{cases}$$

Resolviendo, obtenemos las dos soluciones

$$Q=\left(-\frac{1}{\sqrt{2/7}},\frac{1}{\sqrt{14}},-\frac{3}{\sqrt{14}}\right),\ \lambda=-\sqrt{2/7} \quad \text{y} \quad Q=\left(\frac{1}{\sqrt{2/7}},-\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right),\ \lambda=\sqrt{2/7}$$

7.3 Ejercicios

7.3.1 Sea $f(x,y)=4-x^2-y^2$ la ecuación de una superficie S.

a.) Determine una ecuación vectorial para la recta tangente a S en $R=(1,-1,2)$ "en la dirección del eje X" (en la dirección del vector $\boldsymbol{v}=(1,0)$)

b.) Determine una ecuación vectorial para la recta tangente a S en $R=(1,-1,2)$ "en la dirección del eje Y" (en la dirección del vector $\boldsymbol{v}=(0,1)$)

c.) Determine una ecuación vectorial para la recta tangente a S en $R=(1,-1,2)$ "en la direción del vector $\boldsymbol{u}=(-2,1)$"

d.) Determine un vector normal a S en $R=(1,-1,2)$

e.) Encuentre la ecuación cartesiana del plano tangente a S en el punto $R=(1,-1,2)\in S$.

f.) Determine un vector $\boldsymbol{u}$ para el cual la derivada direccional en $R=(1,-1,2)\in S$ es máxima y calcule su valor.

7.3.2 Sea $x^2+xyz+z^3=1$ la ecuación de una superficie S. Encuentre una ecuación cartesiana del plano tangente a S en el punto $R=(1,-1,1)\in S$.

7.3.3 Considere la superficie $S: xyz+\ln(xyz)-z=0$ y el punto $P(1,1,1)\in S$.

a.) Determine una ecuación del plano tangente a S en P.

b.) Determine una ecuación de la recta tangente a S en P en la dirección del eje X.

c.) Determine una ecuación de la recta tangente a S en P, en la dirección del vector $\boldsymbol{v} = (2,3)$.

d.) (*) Determine si hay algún punto Q en la superficie S en la que el plano tangente sea $x + y + z = 0$

Ⓡ **7.3.4** Considere la superficie $S : z = x^2 + y^2$.

a.) (*) ¿Existe $P \in S$ tal que una ecuación del plano tangente a S en P es $2x + 2y + z = 0$?

b.) Determine un punto $Q \in S$ si se sabe que las rectas tangentes a S en Q, en las direcciones de $\boldsymbol{u} = (1,1)$ y $\boldsymbol{v} = (-1,1)$ tienen una ecuación vectorial $L_u(t) = Q + t\,(1,1,5)$ y $L_v(t) = Q + t\,(-1,1,4)$, respectivamente.

Ⓡ **7.3.5** Considere la superficie S de ecuación $z^3 + xz + y = 1$. $P = (1,1,0) \in S$. Calcule una ecuación cartesiana del plano tangente en el punto P

Ⓡ **7.3.6** Calcule una ecuación vectorial de la recta normal a la superficie $S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en el punto $P = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$

Ⓡ **7.3.7** Considere la superficie S de ecuación $e^{xz} + xy = yz + 1$. Sea $P = (0,1,0) \in S$.

a.) Determine una ecuación vectorial para la recta tangente a S en P "en la dirección del eje X" (en la dirección del vector $\boldsymbol{v} = (1,0)$)

b.) Determine una ecuación vectorial para la recta tangente a S en P "en la dirección del eje Y" (en la dirección del vector $\boldsymbol{v} = (0,1)$)

c.) Determine una ecuación vectorial para la recta tangente a S en P "en la direción del vector $\boldsymbol{v} = (2,-4)$"

d.) Calcule una ecuación cartesiana del plano tangente a S en P.

Ⓡ **7.3.8** Considere la superficie S de ecuación $x^2 + xz^3 = -y^2 z$ y $P = (1,0,-1) \in S$. Calcule una ecuación cartesiana del plano tangente a S en el punto P

Ⓡ **7.3.9** Considere la superficie $S:\ z = \cos(x + \operatorname{sen} y)$

a.) Calcule $D_{\boldsymbol{v}}z(1,1)$ donde $\boldsymbol{v} = (2,1)$

b.) Calcule una ecuación vectorial de la recta tangente a S en $P = (1,1,z(1,1))$ en la dirección del eje X

c.) Calcule una ecuación vectorial de la recta tangente a S en $P = (1,1,z(1,1))$ en la dirección del eje Y

d.) Calcule una ecuación vectorial de la recta tangente a S en $P = (1,1,z(1,1))$ en la dirección de $\boldsymbol{v} = (2,1)$

e.) Determine una ecuación vectorial y una ecuación cartesiana del plano tangente a S en $P = (1,1,z(1,1))$

7.4 Solución de los ejercicios

7.3.1 R

a.) $\mathbf{L}_X(t) = R + t\cdot(1,0,-2)$
b.) $\mathbf{L}_Y(t) = R + t\cdot(0,1,2)$
c.) $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}(t) = R + t\cdot(-2,1,6)$
d.) Si $G(x,y,z) = z-4+x^2+y^2 = 0 \implies N = \nabla\mathbf{G}(R) = (2,-2,1)$
e.) La superficie S tiene ecuación $z = 4-x^2-y^2$. Si $G = z-4+x^2+y^2$ entonces un vector normal al plano es $N = \nabla\mathbf{G}(R) = (2,-2,1)$. Luego la ecuación cartesiana es $2x-2y+z=6$.
f.) $D_u f(R)$ es máxima si $\mathbf{u} = \nabla\mathbf{f}(R) = (-2,2)$. En este caso, $D_{\nabla\mathbf{f}(R)}f(R) = ||\nabla\mathbf{f}(R)|| = \sqrt{8}$.

7.3.2 R La superficie S tiene ecuación $G(x,y,z) = x^2+xyz+z^3-1$, entonces $\nabla\mathbf{G} = (2x+yz,\ xz,\ xy+3z^2)$. Un vector normal al plano es $N = \nabla\mathbf{G}(R) = (1,1,2)$. Luego la ecuación cartesiana es $x+y+2z=2$.

7.3.3 R

a.) $F(x,y,z) = xyz + \ln(xyz) - z = 0$

$$\nabla F(P) = (F_x, F_y, F_z)|_P = \left(yz+\frac{1}{x},\ \ xz+\frac{1}{y},\ \ xy+\frac{1}{z}-1\right)\Big|_P = (2,2,1)$$

$$\pi:\ \nabla F(P)\cdot(x-1,y-1,z-1) = 0$$

$$\pi:\ 2x+2y+z=5$$

b.)

$$z_x(P) = -\frac{F_x(P)}{F_z(P)} = -\frac{2}{1} = -2$$

$$\ell : (x, y, z) = P + t\,(1, 0, z_x(P))\,; \;\; t \in \mathbb{R}$$

$$\ell : (x, y, z) = (1, 1, 1) + t\,(1, 0, -2); \;\; t \in \mathbb{R}$$

c.)

$$\nabla z(P) = \left(-\frac{F_x(P)}{F_z(P)}, -\frac{F_y(P)}{F_z(P)}\right) = (-2, -2)$$

$$\ell : (x, y, z) = P + t\,(v_1, v_2, \nabla z(P) \cdot (v_1, v_2))\,; \;\; t \in \mathbb{R}$$

$$\nabla z(P) \cdot (v_1, v_2) = (-2, -2) \cdot (2, 3) = -10$$

$$\ell : (x, y, z) = (1, 1, 1) + t\,(1, 3, -10); \;\; t \in \mathbb{R}$$

d.)

Si $Q = (a, b, c) \in S \implies abc + \ln(abc) - c = 0,$ es decir, $abc > 0.$

El plano tangente tiene ecuación $x + y + z = 0 \implies \nabla F(Q) = \alpha(1, 1, 1)$ ($\nabla F(Q)$ tiene la misma dirección que $(1, 1, 1)$) y $\nabla F(Q) \cdot Q = 0,$ entonces

$$\begin{cases} Q & \in & S \\ \nabla F(Q) & = & \alpha(1,1,1) \\ F(Q) \cdot Q & = & 0 \end{cases} \implies \begin{cases} abc + \ln(abc) - c & = & 0 \\ bc + \dfrac{1}{a} & = & \alpha \;\; (E2) \\ ac + \dfrac{1}{b} & = & \alpha \;\; (E3) \\ ab + \dfrac{1}{c} - 1 & = & \alpha \;\; (E4) \\ 3abc + 3 & = & c \;\; (E5) \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución. Hay varias maneras de verlo, por ejemplo, multiplicando (E2) por a, (E3) por b, (E4) por c, obtenemos

$$\begin{cases} abc + \ln(abc) - c & = & 0 \\ abc + 1 & = & \alpha\, a \;\; (E2) \\ abc + 1 & = & \alpha\, b \;\; (E3) \\ abc + 1 - c & = & \alpha\, c \;\; (E4) \\ abc + 1 & = & \dfrac{c}{3} \;\; (E5) \end{cases}$$

- Restando (E4) y (E5) se obtiene $\left(\alpha - \frac{2}{3}\right) c = 0 \implies \alpha = -2/3$ (pues $c \neq 0$.)

- De (E2), (E3) y (E4) se despeja $-2a = c$ y $-2b = c$.

- Sustituyendo en (E5) queda $c^3/4 - c/3 + 1 = 0$, resolviendo se obtiene $c \approx -1.86 \implies abc < 0$

Pero la presencia de $\ln(abc)$ en la ecuación de S no permite que $abc < 0$. Por tanto no existe $Q \in S$.

7.3.4 ↰Ⓡ

a.) Sea $G(x, y, z) = z - x^2 - y^2$. $P = (a, b, c) \in S \implies c = a^2 + b^2$.

El plano tangente tiene ecuación $2x + 2y + z = 0 \implies \nabla G(P) = \lambda(2, 2, 1)$, y además, $(2, 2, 1) \cdot P = 0$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2a & = & 2\lambda \\ -2b & = & 2\lambda \\ 1 & = & \lambda \end{array}\right. \implies a = -1,\ b = -1 \text{ y como } P \in S \implies z = 2$$

Pero si $P = (-1, -1, 2) \implies (-1, -1, 2) \cdot (2, 2, 1) = -2 \neq 0$. Por tanto no hay 'un tal P con lo requerido.

b.) Sea $Q = (a, b, c) \in S \implies c = a^2 + b^2$. Además $\nabla z(Q) = (2a,\ 2b)$ De los datos tenemos que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla z(Q) \cdot (1, 1) & = & 5 \\ \nabla z(Q) \cdot (-1, 1) & = & 4 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{rcl} 2a + 2b & = & 5 \\ -2a + 2b & = & 4 \end{array}\right. \implies a = \frac{1}{4} \wedge b = \frac{9}{4}$$

Entonces $Q = \left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{41}{8}\right)$

7.3.5 ↰Ⓡ Como la superficie S tiene ecuación $G(x, y, z) = z^3 + xz + y - 1$, la ecuación cartesiana del plano tangente en el punto P es $\nabla G(P) \cdot (x, y, z) = \nabla G(P) \cdot P$.

- $\nabla G(x, y, z) = (z\ ,\ 1\ ,\ 3z^2 + x)$
- $N = \nabla G(1, 1, 0) = (0\ ,\ 1\ ,\ 1)$

La ecuación cartesiana del plano tangente en el punto P es $y + z = 1$.

7.3.6 ↰Ⓡ La recta normal L pasa por P y va en la dirección de un vector normal a la superficie S e P. Podemos tomar $N = \nabla G(P) = (1, 1, 2/\sqrt{2})$, así una ecuación vectorial de la recta es $L: (x, y, z) = P + t\,(1, 1, 2/\sqrt{2}),\ \ t \in \mathbb{R}$.

7.3.7 ↰Ⓡ

a.) $\mathbf{L}_X(t) = P + t \cdot (1, 0, 1)$

b.) $\mathbf{L}_Y(t) = P + t \cdot (0,1,1)$
c.) $\mathbf{L}_v(t) = P + t \cdot (2,-4,-2)$
d.) $-x - y - z = -1$

7.3.8 Como $G(x,y,z) = x^2 + xz^3 + y^2z,$ la ecuación cartesiana del plano tangente en el punto P es $\nabla\mathbf{G}(P) \cdot (x,y,z) = \nabla\mathbf{G}(P) \cdot P$

- $\nabla\mathbf{G}(x,y,z) = (2x + z^3 \ , \ 2yz \ , \ y^2 + 3xz^2)$

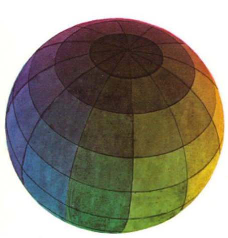
- $N = \nabla\mathbf{G}(1,0,-1) = (1 \ , \ 0 \ , \ 3)$

La ecuación cartesiana del plano tangente en el punto P es $x + 3z = -2$.

7.3.9 Se omite

Citar como:

Walter Mora F. *Cálculo en Varias Variables. Visualización interactiva.* (2019) 2da ed. [ebook] Cartago, Costa Rica. Revista digital, Matemática, Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/.



Revisado: Julio, 2022

Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF: https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

http://www.matematicainteractivacr.com/