

Semana 5: Derivación Implícita

Derivadas Parciales: Derivada de una función definida de manera implícita

Revista de Matemática/Libros

W. Mora. "Cálculo en Varias Variables."



Las aplicaciones interactivas requieren haber instalado la aplicación gratuita Wolfram CDFPlayer
<https://www.wolfram.com/cdf-player/>



Contenido

6.1	Derivadas de una función definida de manera implícita.	1
6.2	Ejercicios	4
6.3	Solución de los ejercicios	6
	Licencia Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0	9



6.1 Derivadas de una función definida de manera implícita.

Supongamos que se conoce que z es una función de x e y , es decir, $z = f(x, y)$, pero que z está definida de manera implícita por una ecuación del tipo

$$F(x, y, z) = 0$$

Estas situaciones ya las hemos encontrado antes, por ejemplo en la ecuación de una esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Esta ecuación define a z como una función de x y y y en este caso, z se puede despejar:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \text{ y } z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

Cuando una función está definida de manera implícita, no siempre es posible despejarla: Si $y^2 + xz + z^2 - e^z - 1 = 0$ no hay posibilidad de despejar $z = z(x, y)$, aunque teóricamente podría ser posible en un entorno de algún punto. En todo caso, si podemos calcular las derivadas parciales.

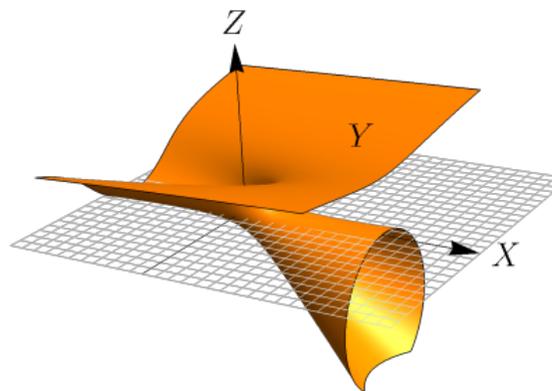


Figura 6.1: Superficie $S : y^2 + xz + z^2 - e^z - 1 = 0$

Podemos deducir, de manera informal, las fórmulas para z_x y z_y . Supongamos que $z = z(x, y)$ y que $F(x, y, z(x, y)) = 0$ y que en algún conjunto abierto D las derivadas parciales de z existen y la función F

es diferenciable en D .

Sea $g(x, y) = F(x, y, z) = 0$, aplicando la regla de la cadena a $g(x, y) = F(u, v, w)$, con $x = u(x, y)$, $y = v(x, y)$ y $w(x, y) = z(x, y)$, obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}$$

Ahora, como $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, entonces

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 \cdot \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Despejando,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{en todos los puntos de } D \text{ donde } \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{(x,y,z(x,y))} \neq 0$$

De manera similar, $\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

Teorema 6.1

Si F es diferenciable en un conjunto abierto D de \mathbb{R}^n y si la ecuación $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ define a x_n como una función diferenciable $x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ en algún conjunto abierto de \mathbb{R}^{n-1} , entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}$$

en aquellos puntos en los que $\frac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0$.

Una función $z = z(x, y)$ definida de manera implícita por $F(x, y, z) = 0$.

Si $z = z(x, y)$ está definida de manera implícita por $F(x, y, z) = 0$, de acuerdo a las hipótesis del teorema 6.1, entonces

$$z_x = - \frac{F_x}{F_z} \quad \text{y} \quad z_y = - \frac{F_y}{F_z}.$$

En el teorema de la función implícita podemos intercambiar variables. Por ejemplo, si x y z son las variables independientes y si se cumplen las hipótesis del teorema,

$$y_x = -\frac{F_x}{F_y} \quad \text{y} \quad y_z = -\frac{F_z}{F_y}.$$

Este teorema se puede generalizar para ecuaciones $F(x, y, z, u) = 0$.

Ejemplo 6.1

Sea z definida de manera implícita por $F(x, y, z) = xyz + x + y - z = 0$. Como se cumplen las condiciones del teorema 6.1 entonces

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{zy + 1}{xy - 1} \quad \text{y} \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{zx + 1}{xy - 1}$$

Ejemplo 6.2

Calcule z_x y z_y si $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$ define a z como $z = z(x, y)$.

Solución: Dado que $F_x = 2x$, $F_y = -4y - z + 1$, $F_z = 6z - y$, entonces si $F_z \neq 0$,

$$z_x = -\frac{2x}{6z - y}$$

$$z_y = -\frac{1 - 4y - z}{6z - y}$$

en $\mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 6z(x, y) - y = 0\}$

Ejemplo 6.3

Considere la función z definida de manera implícita por $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Calcular z_x , z_y , z_{xx} , z_{yy} y z_{yx}

Solución:

z está definida de manera implícita por $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Entonces,

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x}{z} \quad \text{y} \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{y}{z}$$

Para calcular z_{xy} , z_{xx} y z_{yy} debemos notar que z_x y z_y *no son* funciones definidas de implícita, como tal derivamos de manera ordinaria.

$$z_{xx} = \frac{\partial(z_x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{z} \right) = -\frac{1 \cdot z - x z_x}{z^2} = -\frac{z - x \left(-\frac{x}{z} \right)}{z^2},$$

$$z_{yy} = \frac{\partial(z_y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{z} \right) = -\frac{1 \cdot z - y z_y}{z^2} = -\frac{z^2 + y^2}{z^3},$$

$$z_{yx} = \frac{\partial(z_y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{y}{z} \right) = \frac{y \cdot z_x}{z^2} = \frac{y \left(-\frac{x}{z} \right)}{z^2}.$$

Ejemplo 6.4

Si $F(xz, yz) = 0$ define a z como función implícita de x e y y además cumple con las condiciones del teorema 6.1 en cada punto de una región D , entonces verifique que, en D , se satisface la ecuación

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -z$$

Solución: Sea $u = xz$ y $v = yz$, entonces $F(xz, yz) = F(u, v) = 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{F_u \cdot 0 + F_v \cdot z}{F_u \cdot x + F_v \cdot y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{F_u \cdot z + F_v \cdot 0}{F_u \cdot x + F_v \cdot y}$$

Luego

$$\begin{aligned} y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} &= -y \cdot \frac{F_v \cdot z}{F_u \cdot x + F_v \cdot y} + -x \cdot \frac{F_u \cdot z}{F_u \cdot x + F_v \cdot y} \\ &= -\frac{z(F_u \cdot x + F_v \cdot y)}{F_u \cdot x + F_v \cdot y} \\ &= -z \end{aligned}$$

6.2 Ejercicios

- (R) 6.2.1** Si $x^2y^2 + \text{sen}(xyz) + z^2 = 4$ define a z como función implícita de x e y , verifique que $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
- (R) 6.2.2** Sea $z = f(z/xy)$ con f dos veces derivable. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ y verifique que $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
- (R) 6.2.3** Sea $g\left(\frac{xy}{z}, x^2 + y^2\right) = 0$ una ecuación que define a z como una función de x e y . Verifique que si g_x , g_y y g_z existen y son continuas en toda la región en la que $g_z \neq 0$, entonces

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{z(x^2 - y^2)}{xy}$$

R 6.2.4 Supongamos que g es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas.

Calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ si $z = \frac{g(u, v)}{y^2}$ con $u = y^3$ y $v = x - 2$

R 6.2.5 Supongamos que g es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas.

Calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ si $z = g(y^3, x + 2) + z^3$ define a z como función implícita de x y y .

R 6.2.6 Sea $z = x \ln(yz)$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

R 6.2.7 Si $f(zx, y^2) = xy$ define a z como función implícita de x y y , calcule z_{xy} .

R 6.2.8 Si $f(zx, y^2) + g(z^2) = 5$ define a z como función implícita de x y y . Calcule z_x y z_y

R 6.2.9 Sea f una función con derivadas de segundo orden continuas y g una función dos veces derivable. Supongamos que la ecuación $2g(z) + f(x^2, y) = 0$ define a $z = z(x, y)$ de manera implícita.

Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

R 6.2.10 Sea f una función con derivadas de segundo orden continuas. Supongamos que la ecuación $zx + f(x^2, y^2) = 0$ define a $z = z(x, y)$ de manera implícita.

Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

R 6.2.11 Sea f una función con derivadas de segundo orden continuas y g una función dos veces derivable. Supongamos que la ecuación $g(z)f^3(x^2, y) = 0$ define a z como función implícita de x y y . Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

R 6.2.12 Sean F una función diferenciable y f una función derivable. La ecuación $F(f(xy), f(z^2)) = 0$ define a z como una función implícita de x y y Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

R 6.2.13 Sea z definida implícitamente por medio de la relación $z = x \cdot f\left(\frac{y}{z}\right)$ con f una función con derivada continua. Verifique que z satisface la ecuación:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

R 6.2.14 Si $f(x, y) = \frac{\cos(7x - y)}{x}$, determine una constante K de tal manera que se cumpla la identidad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 7 \cdot f(x, y) + \frac{K}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

6.2.15 Si $zx + e^{zy} = x$ define a z como función implícita de x y y , calcule z_x , z_y y $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

6.2.16 Sea f una función con derivadas de segundo orden continuas y g una función dos veces derivable. Si $y = g(z^2) + f(y^2, x^2)$ define a z como función implícita de x y y , calcule z_x , z_y y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

6.2.17 La ecuación de Redlich-Kwong de dos parámetros es

$$\left[P + \frac{n^2 a}{\sqrt{TV}(V + nb)} \right] [V - nb] - nRT = 0$$

donde a, b son parámetros, R es la constante de gas y n el número de moles. La función $T = T(P, V)$ está definida de manera implícita por esta ecuación. Calcule $\frac{\partial T}{\partial P}$.

6.3 Solución de los ejercicios

6.2.1

Sea $F(x, y, z) = x^2 y^2 + \text{sen}(xyz) + z^2 - 4$. Si las derivadas parciales z_x y z_y existen en todo el dominio en el que $F_z \neq 0$, entonces

- $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2xy^2 + yz \cos(xyz)}{xy \cos(xyz) + 2z}$
- $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2x^2 y + xz \cos(xyz)}{xy \cos(xyz) + 2z}$
- La identidad se obtiene sustituyendo y simplificando.

6.2.2

Sea $F = z - f(u)$ con $u = z/xy$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-f'(u) \cdot \frac{-z}{x^2 y}}{1 - f'(u) \cdot \frac{1}{xy}} = -\frac{z}{x} \cdot \frac{f'(u)}{xy - f'(u)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-f'(u) \cdot \frac{-z}{xy^2}}{1 - f'(u) \cdot \frac{1}{xy}} = -\frac{z}{y} \cdot \frac{f'(u)}{xy - f'(u)}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = -x \cdot \frac{z}{x} \cdot \frac{f'(u)}{xy - f'(u)} - y \cdot \left(-\frac{z}{y}\right) \cdot \frac{f'(u)}{xy - f'(u)} = 0 \quad \checkmark$$

6.2.3

En este caso, $F = g\left(\frac{xy}{z}, x^2 + y^2\right)$.

- $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{g_x}{g_z} = -\frac{g_u \cdot \frac{y}{z} + g_v \cdot 2x}{-g_u \cdot \frac{xy}{z^2}}$
- $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{g_y}{g_z} = -\frac{g_u \cdot \frac{x}{z} + g_v \cdot 2y}{-g_u \cdot \frac{xy}{z^2}}$
- $y \cdot \frac{g_u \cdot \frac{y}{z} + g_v \cdot 2x}{g_u \cdot \frac{xy}{z^2}} - x \cdot \frac{g_u \cdot \frac{x}{z} + g_v \cdot 2y}{g_u \cdot \frac{xy}{z^2}} = -\frac{g_u \left(\frac{x^2 - y^2}{z} \right)}{g_u \cdot \frac{xy}{z^2}} = -\frac{z(x^2 - y^2)}{xy} \checkmark$

6.2.4  

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot 1 \right) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial v}}{y^2} \right) = \frac{3y^4 \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} - 2y \cdot \frac{\partial g}{\partial v}}{y^4} \end{cases}$$

6.2.5   Sea $F(x, y, z) = z^3 + g(A, B) - z = 0$ con $A = y^3$ y $B = x + 2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial B}}{3z^2 - 1}$$

Ahora, de nuevo $z = z(x, y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial B}}{3z^2 - 1} \right) = -\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial A \partial B} \cdot 1 \cdot (3z^2 - 1) - \left(6z^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial g}{\partial B}}{(3z^2 - 1)^2}$$

6.2.6   La primera derivada se hace derivando implícitamente; las segundas derivadas son derivadas ordinarias.

- $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z \ln(yz)}{x - z}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{z \ln(yz)}{x - z} \right] = -\frac{\left[\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \ln(yz) + z \cdot \frac{y \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{yz} \right] (x - z) - \left(1 - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot z \ln(yz)}{(x - z)^2} \\ &= -\frac{\left[-\frac{z \ln(yz)}{x - z} \cdot \ln(yz) + z \cdot \frac{y \cdot -\frac{z \ln(yz)}{x - z}}{yz} \right] (x - z) - \left(1 + \frac{z \ln(yz)}{x - z} \right) \cdot z \ln(yz)}{(x - z)^2} \end{aligned}$$

$$\bullet \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz}{y(x-z)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{xz}{y(x-z)} \right] = -\frac{x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y(x-z) - \left(x-z-y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot xz}{y^2(x-z)^2} \\ &= -\frac{x \cdot \frac{xz}{y(x-z)} \cdot y(x-z) - \left(x-z-y \cdot \frac{xz}{y(x-z)} \right) \cdot xz}{y^2(x-z)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{xz}{y(x-z)} \right] = -\frac{\left(z+x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot y(x-z) - \left(y-y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot xz}{y^2(x-z)^2} \\ &= -\frac{\left(z+x \cdot -\frac{z \ln(yz)}{x-z} \right) \cdot y(x-z) - \left(y-y \cdot -\frac{z \ln(yz)}{x-z} \right) \cdot xz}{y^2(x-z)^2} \end{aligned}$$

6.2.7  Sea $F(x, y, z) = f(u, v) - xy$ con $u = zx$ y $v = y^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2y - x}{\frac{\partial f}{\partial u} \cdot x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2y - x}{\frac{\partial f}{\partial u} \cdot x} \right) = -\frac{\left(2y \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \left[z+x \frac{\partial z}{\partial x} \right] - 1 \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \cdot x - \left(\frac{\partial f}{\partial u} + x \cdot \frac{\partial f}{\partial u^2} \left[z+x \frac{\partial z}{\partial x} \right] \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2y - x \right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot x \right)^2}$$

6.2.8 

6.2.9  Sea $F(x, y, z) = 2g(z) + f(A, y) = 0$ con $A = x^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial A} \cdot 2x}{2g'(z)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial A} \cdot 2x}{2g'(z)} \right) = \frac{\left(2x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial A} \right) (2g'(z)) - 2g''(z) \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial A} \cdot 2x \right)}{(2g'(z))^2}$$

6.2.10 

6.2.11 

6.2.12   Tenemos $F(u, v) = 0$ con $u = f(A)$, $v = f(B)$ y $A = xy$ y $B = z^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u} \cdot f'(A) \cdot y + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot f'(B) \cdot 0}{\frac{\partial F}{\partial u} \cdot f'(A) \cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot f'(B) \cdot 2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u} \cdot f'(A) \cdot x + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot f'(B) \cdot 0}{\frac{\partial F}{\partial u} \cdot f'(A) \cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot f'(B) \cdot 2z}$$

6.2.13  

6.2.14   $K = -1$

6.2.15  

6.2.16   $F(x, y, z) = y - g(u) - f(v, w)$ con $u = z^2$, $v = y^2$, $w = x^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x \frac{\partial f}{\partial w}}{-2zg'(u)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 - 2y \frac{\partial f}{\partial v}}{2zg'(u)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\left(-2 \frac{\partial f}{\partial v} - 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) (2zg'(u)) - \left(2 \frac{\partial z}{\partial y} g'(u) + 4z^2 g''(u) \frac{\partial z}{\partial y} \right) \left(1 - 2y \frac{\partial f}{\partial v} \right)}{[2zg'(u)]^2}$$

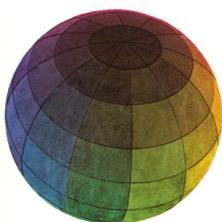
6.2.17  



Este material se distribuye bajo licencia Creative Commons "Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional" (CC BY-NC-ND 4.0) (ver; <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>)

Citar como:

Walter Mora F. *Cálculo en Varias Variables. Visualización interactiva*. (2019) 2da ed. [ebook] Cartago, Costa Rica. Revista digital, Matemática, Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/.



Revisado: Julio, 2022

Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF: https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

<http://www.matematicainteractivacr.com/>