Semana 5: Derivadas de orden superior

Derivadas Parciales: Derivadas de orden superior

Revista de Matemática/Libros
W. Mora. "Cálculo en Varias Variables."

Contenido

5.1 Derivadas parciales de orden superior . . . 1
5.2 Ejercicios . . . 5
5.3 Solución de los ejercicios . . . 6
Licencia Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0 . . . 8

5.1 Derivadas parciales de orden superior

Si f es una función de dos variables x e y, entonces sus derivadas parciales f_x y f_y también son funciones de dos variables, de modo que podemos considerar sus derivadas parciales $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ y $(f_y)_y$, las cuales se llaman segundas derivadas parciales de f.

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

Si $z = f(x,y)$, se utilizan diferentes notaciones para estas derivadas parciales,

- $(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
- $(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$
- $(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
- $(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

La notación f_{xy} o $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ significa que primero derivamos con respecto a x y luego con respecto a y, mientras que para calcular f_{yx} el orden se invierte.

Ejemplo 5.1

Si $f(x,y) = x^3 + x^2y^2 + y^3$, calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Solución: Las primeras derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + 3y^2$$

De donde obtenemos que :

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2y^2$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y + 2x^2$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[3x^2 + 2xy^2\right] = 4xy$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[2x^2y + 3y^2\right] = 4xy$

Ejemplo 5.2

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable y sea $z = f(u)$ con $u = x^3y^4$. Entonces,

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \underbrace{f'(u)} \cdot \underbrace{3x^2y^4}$
- $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \underbrace{f'(u)} \cdot \underbrace{x^3\,4y^3}$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u) \cdot 3x^2y^4 \cdot 3x^2y^4 \; + \; 6xy^4 f'(u)$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u) \cdot 4x^3y^3 \cdot 4x^3y^3 \; + \; 12x^3y^2 f'(u)$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''(u) \cdot 4x^3y^3 \cdot 3x^2y^4 \; + \; 12x^2y^3 f'(u)$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''(u) \cdot 3x^2y^4 \cdot 4x^3y^3 \; + \; 12x^2y^3 f'(u)$

Ejemplo 5.3

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se usan para expresar leyes físicas. Por ejemplo, la ecuación diferencial parcial $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ se conoce como ecuación de Laplace, en honor a Pierre Laplace (1749 - 1827). Las soluciones de esta ecuación se llaman funciones armónicas y desempeñan un papel fundamental en las aplicaciones relacionadas con conducción de calor, flujo de fluidos y potencial eléctrico.

Compruebe que la función $u(x,y) = e^y \operatorname{sen} x$ satisface la ecuación de Laplace.

Solución: Las primeras derivadas parciales están dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^y \cos x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^y \operatorname{sen} x$$

con lo cual

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^y \operatorname{sen} x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y \operatorname{sen} x$$

de donde $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^y \operatorname{sen} x + e^y \operatorname{sen} x = 0$ ✓

Ejemplo 5.4

La ecuación de onda $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, donde a es una constante, describe el movimiento de una onda, que puede ser una onda de sonido, una onda de luz o una onda que viaja a lo largo de una cuerda vibrante. Si f y g son funciones de una sola variable dos veces derivables, compruebe que la función $u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$ satisface la ecuación de onda.

Solución: Primero un cambio de variable. Sea $A = x + at$ y $B = x - at$. De esta manera $u = f(A) + g(B)$. Las derivadas de $u(x,y)$ con respecto a x están dadas por :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(A) + g'(B), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(A) + g''(B)$$

Las derivadas de $u(x,y)$ con respecto a t están dadas por :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = af'(A) - ag'(B), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(A) + a^2 g''(B)$$

Sustituyendo obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(A) + a^2 g''(B) = a^2[f''(A) + g''(B)] = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \checkmark$$

Ejemplo 5.5

Consideremos f y g funciones de una sola variable dos veces derivables, compruebe que la función $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ satisface la ecuación diferencial parcial $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.

Solución: Primero un cambio de variable. Sea $A = x + y$, entonces $u = xf(A) + yg(A)$. Las derivadas de $u(x,y)$ con respecto a x están dadas por

$$u_x = f(A) + xf'(A) + yg'(A)$$

$u_{xx} = f'(A) + f'(A) + xf''(A) + yg''(A) = 2f'(A) + xf''(A) + yg''(A)$

$u_{xy} = f'(A) + xf''(A) + g'(A) + yg''(A)$

$u_y = xf'(A) + g(A) + yg'(A)$

$u_{yy} = xf''(A) + g'(A) + g'(A) + yg''(A) = xf''(A) + 2g'(A) + yg''(A)$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} \;\; = \;\; & 2\,f'(A) + xf''(x+y) + yg''(A) - \;2f'(A) - 2xf''(A) - 2g'(A) \\ & -2yg''(A) + \;xf''(A) + 2g'(A) + yg''(A) \;=\; 0 \;\checkmark \end{aligned}$$

Ejemplo 5.6

Compruebe que la función $u(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ satisface la ecuación diferencial de Laplace en derivadas parciales $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

Solución: Calculemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y^2} = -\frac{-x^2+2y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z^2} = -\frac{-x^2-y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

y al sumarlas obtenemos el resultado deseado.

Observación: Note que las *derivadas parciales mixtas* f_{xy} y f_{yx} en el ejemplo anterior son iguales. El siguiente teorema, da las condiciones bajo las cuales podemos afirmar que estas derivadas son iguales. El teorema es conocido de Clairaut o también como Teorema de Schwarz.

Teorema 5.1 (Teorema de Clairaut o Teorema de Schwarz).

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar donde D es un disco abierto con centro en (a,b) y radio δ, si las funciones f_{xy} y f_{yx} son continuas en D, entonces

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

5.2 Ejercicios

Ⓡ **5.2.1** Sea k una constante y $C(x,t) = t^{-1/2}e^{-x^2/kt}$. Verifique que esta función satisface la ecuación (de difusión)

$$\frac{k}{4}\cdot\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

Ⓡ **5.2.2** Verifique que $u(x,y) = e^y \operatorname{sen} x$ satisface la ecuación de Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Ⓡ **5.2.3** Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante. Verifique que $u(x,t) = \operatorname{sen}(x-at) + \ln(x+at)$ es solución de la ecuación de onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

Ⓡ **5.2.4** Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante y f y g funciones dos veces derivables. Verifique que $u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$ es solución de la ecuación de onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

Ⓡ **5.2.5** Verifique que $z = \ln(e^x + e^y)$ es solución de las ecuación diferencial $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$ y de la ecuación diferencial $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$

Ⓡ **5.2.6** Sea $g(x,y) = x^2 \operatorname{sen}(3x - 2y)$. Verifique la identidad

$$x\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 2\frac{\partial g}{\partial y} + 6x\cdot g(x,y).$$

Ⓡ **5.2.7** La energía cinética de un cuerpo de masa m y velocidad v es $K = \dfrac{1}{2}mv^2$. Verifique que $\dfrac{\partial K}{\partial m}\dfrac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$.

Ⓡ **5.2.8** Sea f y g funciones dos veces derivables. Sea $u = x^2 + y^2$ y $w(x,y) = f(u)\cdot g(y)$. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

Ⓡ **5.2.9** Sea f y g funciones dos veces derivables. Sea $w(x,y) = f(u) + g(v)$ donde $u = \dfrac{x}{y}$ y $v = \dfrac{y}{x}$. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$.

Ⓡ **5.2.10** Sea $w = e^{3x}\cdot f(x^2 - 4y^2)$, donde f es una función dos veces diferenciable. Calcule $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

Ⓡ **5.2.11** Sea $u(r,\theta) = r^n\cos(n\theta)$ con $n \in \mathbb{N}$ una constante. Verfique que u satisface la ecuacón

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 0$$

5.3 Solución de los ejercicios

5.2.1 Ⓡ Pongamos $C(x,t) = \dfrac{e^{-x^2/kt}}{\sqrt{t}}$.

- $\dfrac{\partial C}{\partial t} = \dfrac{\left(\sqrt{t}\,\dfrac{-2x}{kt} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)e^{-x^2/kt}}{t} = e^{-x^2/kt}\left(\dfrac{x^2}{kt^{5/2}} - \dfrac{1}{2t^{3/2}}\right)$
- $\dfrac{\partial C}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\,\dfrac{-2x}{kt}\,e^{-x^2/kt}$
- $\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} = e^{-x^2/kt}\,\dfrac{1}{\sqrt{t}}\left(\dfrac{4x^2}{k^2t^2} - \dfrac{2}{kt}\right) = e^{-x^2/kt}\left(\dfrac{4x^2}{k^2t^{5/2}} - \dfrac{2}{kt^{3/2}}\right)$
- Luego, multiplicando $\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ por $\dfrac{k}{4}$ se obtiene la identidad.

5.2.2 Ⓡ

- $u_x = e^y \cos x$
- $u_y = e^y \operatorname{sen} x$
- $u_{xx} = -e^y \operatorname{sen} x$
- $u_{yy} = e^y \operatorname{sen} x$
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^y \operatorname{sen} x + e^y \operatorname{sen} x = 0 \quad \surd$

5.2.3 Ⓡ

- $u_t = -a\cos(x-at) + \dfrac{a}{x+at}$
- $u_{tt} = -a^2 \operatorname{sen}(x-at) - \dfrac{a^2}{(x+at)^2}$
- $u_x = \cos(x-at) + \dfrac{1}{x+at}$
- $u_{xx} = -\operatorname{sen}(x-at) - \dfrac{1}{(x+at)^2}$
- $u_{tt} = -a^2 \operatorname{sen}(x-at) - \dfrac{a^2}{(x+at)^2} = a^2\cdot\left(-\operatorname{sen}(x-at) - \dfrac{1}{(x+at)^2}\right) = a^2\cdot u_{xx}. \quad \surd$

5.2.4 Ⓡ Sea $A = x - at$ y $B = x + at$, entonces $u(x,t) = f(A) + f(B)$.

- $u_t = -af'(A) + ag'(B)$

- $u_{tt} = a^2 f''(A) + a^2 g''(B)$
- $u_x = f'(A) + g'(B)$
- $u_{xx} = f''(A) + g''(B)$
- $u_{tt} = a^2 f''(A) + a^2 g''(B) = a^2 \cdot u_{xx}.\quad \surd$

5.2.5 R Satisface $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1.$

- $z_x = \dfrac{e^x}{e^x + e^y}$
- $z_y = \dfrac{e^y}{e^x + e^y}$
- $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{e^x}{e^x + e^y} + \dfrac{e^y}{e^x + e^y} = 1 \quad \surd$

Satisface $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$

- $z_{xx} = \dfrac{e^x \cdot (e^x + e^y) - e^x \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2}$
- $z_{yy} = \dfrac{e^y \cdot (e^x + e^y) - e^y \cdot e^y}{(e^x + e^y)^2}$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{e^y}{e^x + e^y}\right] = \dfrac{-e^y \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2}.$
- $$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 &= \frac{e^x \cdot (e^x + e^y) - e^x \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2} \cdot \frac{e^y \cdot (e^x + e^y) - e^y \cdot e^y}{(e^x + e^y)^2} - \left(\frac{-e^y \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2}\right)^2 \\ &= \frac{e^x \cdot e^y}{(e^x + e^y)^2} \cdot \frac{e^y \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2} - \left(\frac{-e^y \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2}\right)^2 = 0 \ \surd \end{aligned}$$

5.2.6 R

$\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x\,\text{sen}(3x - 2y) + 3x^2 \cos(3x - 2y)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y} = -2x^2 \cos(3x - 2y)$ y $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = -4x \cos(3x - 2y) - 6x^2\,\text{sen}(3x - 2y)$. La identidad se verifica de manera directa.

5.2.7 R $\dfrac{\partial K}{\partial m}\dfrac{\partial^2 K}{\partial v^2} = \dfrac{1}{2}v^2 \cdot m = K.\ \surd$

5.2.8 R

- $\dfrac{\partial w}{\partial x} = f'(u) \cdot 2x \cdot g(y)$
- $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2g(y) \cdot [f''(u) \cdot 2x^2 + f'(u)]$
- $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 2x[f''(u) \cdot 2y \cdot g(y) + g'(y) \cdot f'(u)]$

- $\dfrac{\partial w}{\partial y} = f'(u) \cdot 2y \cdot g(y) + g'(y) \cdot f(u)$

5.2.9 R

- $\dfrac{\partial w}{\partial x} = f'(u) \cdot \dfrac{1}{y} + g'(v) \cdot \dfrac{-y}{x^2}$
- $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = f''(u) \cdot \dfrac{-x}{y^2} \cdot \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y^2} \cdot f'(u) + g''(v) \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{-y}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} \cdot g'(v).$

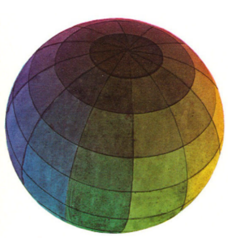
5.2.10 R Sea $u = x^2 - 4y^2$,

- $\dfrac{\partial w}{\partial y} = -e^{3x} f'(u) \cdot 8y$
- $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 8y \left[-3e^{3x} f'(u) - e^{3x} f''(u) \cdot 2x \right]$

5.2.11 R $u_{rr} = n(n-1)r^{n-2}\cos(n\theta)$ y $u_{\theta\theta} = -n^2 r^n \cos(n\theta)$. Sustituyendo y simplificando se verifica la ecuación.

Citar como:

Walter Mora F. *Cálculo en Varias Variables. Visualización interactiva.* (2019) 2da ed. [ebook] Cartago, Costa Rica. Revista digital, Matemática, Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/.



Revisado: Julio, 2022

Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF: https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

http://www.matematicainteractivacr.com/