Instituto Tecnológico de Costa Rica
TEC| ESCUELA DE MATEMÁTICA — CÁLCULO SUPERIOR

SEMANA 2: Secciones cónicas II

Hipérbola

Revista de Matemática/Libros
W. Mora. "Cálculo en Varias Variables."

Las aplicaciones interactivas requieren haber instalado la aplicación gratuita Wolfram CDFPlayer
https://www.wolfram.com/cdf-player/

Wolfram CDF Player

Contenido

2.1 La Hipérbola.

Definición 2.1 (La hipérbola como lugar geométrico).

En un plano, una hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos Q tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, F_1 y F_2, (llamados *focos*), es constante (una constante menor que $d(F_1, F_2)$). Si la diferencia es la constante $2a$, con $2a < d(F_1, F_2)$, entonces $|d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| = 2a$

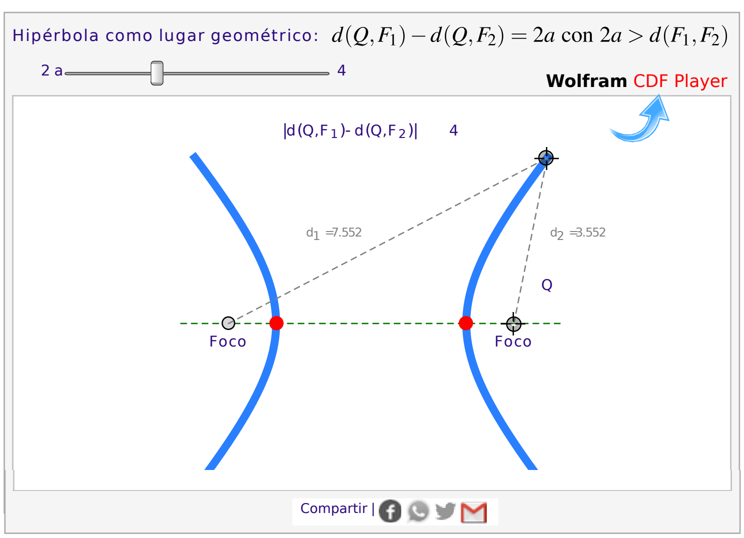
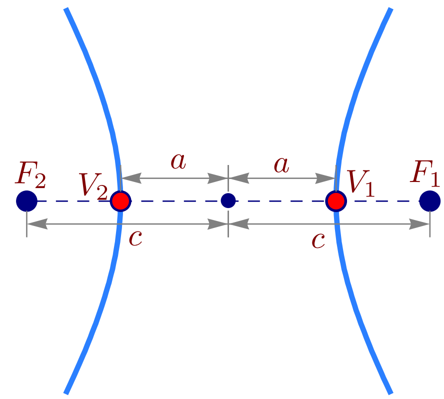


Figura 2.1: Hipérbola

Ejes, centro y vértices. Supongamos que los focos de la hipérbola son F_1 y F_2. Además, $|d(Q,F_1)-d(Q,F_2)|=2a$ con $2a<d(F_1,F_2)$. La recta que pasa por los focos se llama *eje focal.* Este eje focal corta a la hipérbola en dos puntos V_1, V_2 llamados *vértices.* El segmento de recta que une los vértices se llama *eje transverso.* El punto medio de este eje se llama *centro* de la hipérbola.



De la definición de la hipérbola se puede deducir que la distancia entre los vértices es $2a$ y cada vértice está a una distancia de a unidades del centro. Si la distancia del centro a cada uno de los focos es c, entonces $c>a$ y

$$c^2=a^2+b^2.$$

Ecuación canónica

En coordenadas rectangulares, una hipérbola tiene ecuación general

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \text{ con } B^2-4AC>0 \text{ y } \Delta\neq 0$$

Si $B\neq 0$, el "eje focal" no es paralelo al eje X ni al eje Y. En este caso, la hipérbola presenta una rotación respecto a estos ejes. La rotación se puede eliminar (respecto a los nuevos ejes X', Y') haciendo un cambio de variable (ver apéndice A del libro base).

Si $B=0$, la cónica está en posición estándar y el eje focal es paralelo al eje X o paralela al eje Y.

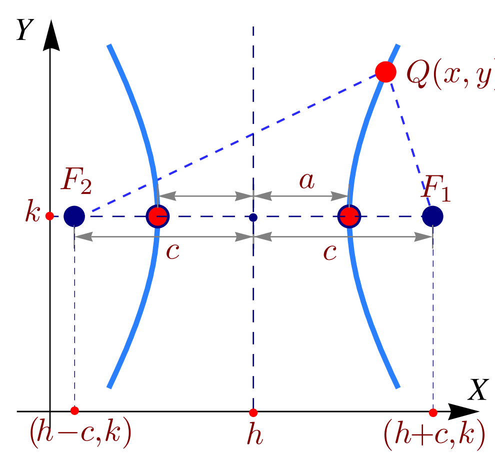
Hipérbola en posición estándar: Eje focal paralela al eje X. En este caso, si el centro es (h,k), entonces $F_1=(h+c,k)$ y $F_2=(h-c,k)$. Los puntos $Q=(x,y)$ de la hipérbola satisfacen

$$|d(Q,F_1)-d(Q,F_2)|=2a,$$

es decir,

$$\left|\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2}-\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}\right|=2a$$

Para simplificar un poco el cálculo, supongamos que $d(Q,F_1)-d(Q,F_2)>0$ (el otro caso es es totalmente similar), entonces



$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2}\right)^2 &= \left(2a-\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}\right)^2,\\
c(x-h)-a^2 &= a\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2},\\
\text{elevamos al cuadrado,} & \\
(c^2-a^2)(x-h)^2-a^2(y-k)^2 &= a^2(c^2-a^2),\\
\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{c^2-a^2} &= 1.
\end{aligned}$$

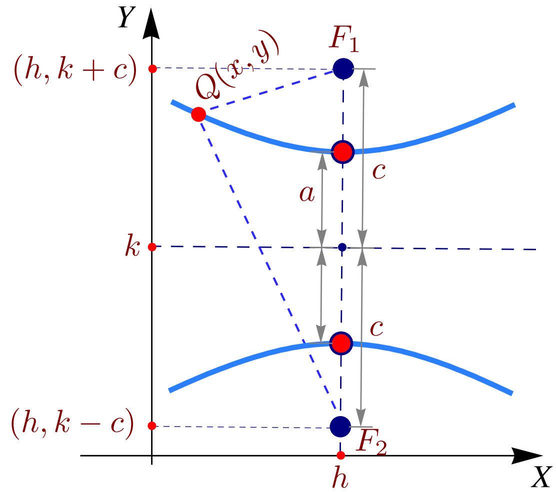
Poniendo $b^2=c^2-a^2$, la ecuación simplificada sería $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1;$ esta ecuación se le llama *ecuación* *canónica* o *natural.* Contiene toda la información para determinar la longitud de los semiejes, c , focos y vértices.

Hipérbola en posición estándar: Eje focal paralela al eje Y. En este caso, si el centro es (h,k), entonces $F_1 = (h,k-c)$ y $F_2 = (h,k+c)$. Los puntos $Q = (x,y)$ de la hipérbola satisfacen

$$|d(Q,F_1) - d(Q,F_2)| = 2a,$$

es decir,

$$\left|\sqrt{(x-h)^2+(y-k+c)^2} - \sqrt{(x-h)^2+(y-k-c)^2}\right| = 2a.$$



Como antes, la ecuación simplificada queda

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

A esta ecuación se le llama *ecuación canónica* o *natural.* Contiene toda la información para determinar la longitud de los semiejes, c , focos y vértices.

Asíntotas de la hipérbola. Consideremos las ecuaciones canónicas de la hipérbola. Para determinar las asíntotas oblicuas de la hipérbola se necesita despejar y en ambas ecuaciones y analizar el comportamiento "asíntotico de la función" para x suficientemente grande. Informalmente,

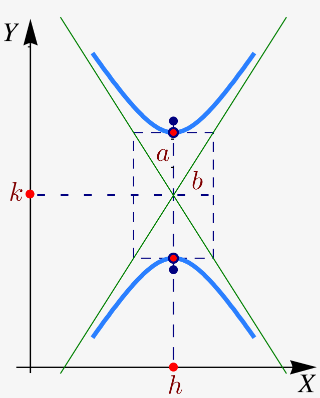
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \implies y = k \pm \frac{a}{b}\sqrt{(x-h)^2+b^2} \implies y \sim k \pm \frac{a}{b}(x-h) \ \text{ si } \ x \longrightarrow \pm\infty$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \implies y = k \pm \frac{b}{a}\sqrt{(x-h)^2-a^2} \implies y \sim k \pm \frac{b}{a}(x-h) \ \text{ si } \ x \longrightarrow \pm\infty$$

Teorema 2.1 (Asíntotas de la hipérbola).

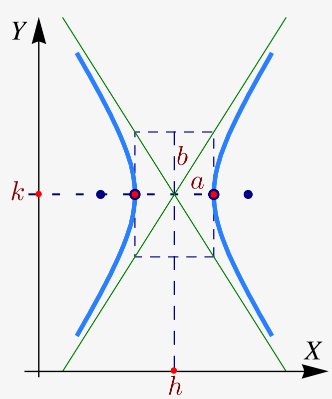
La hipérbola de ecuación $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ tiene asíntotas

$$y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$$



La hipérbola de ecuación $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ tiene asíntotas

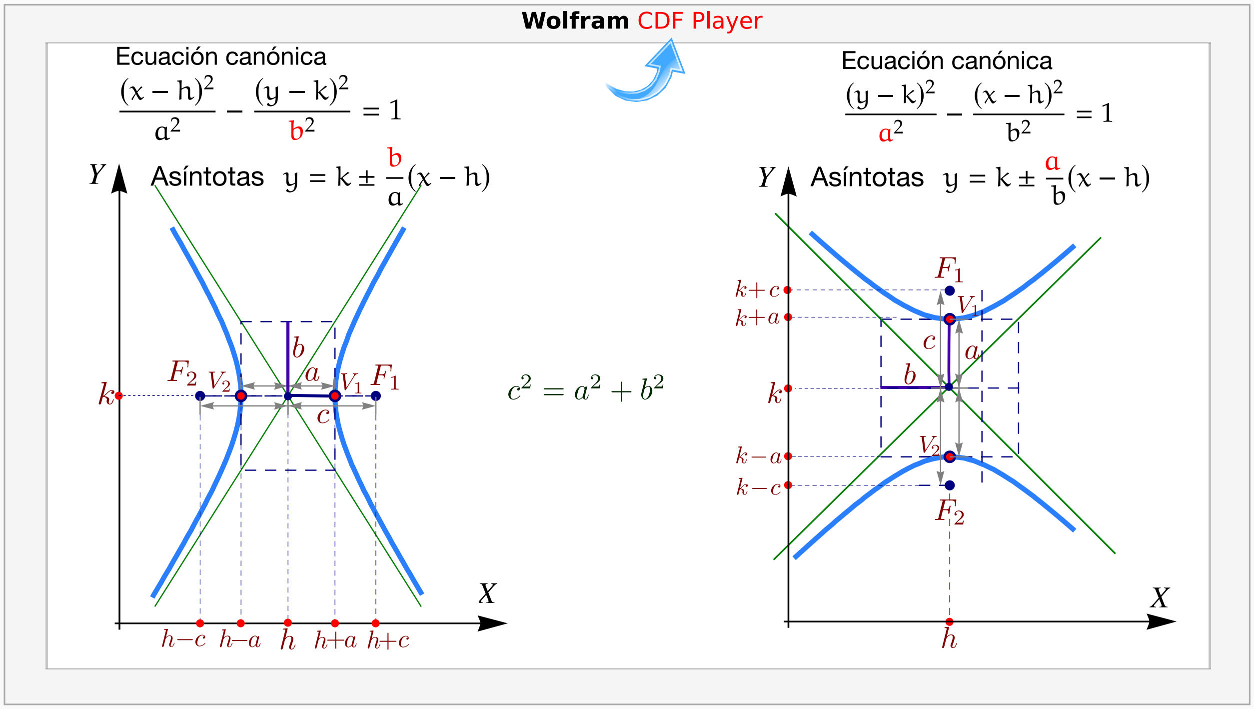
$$y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$$



Para probar el teorema se requiere verficar, por ejemplo, que $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} k \pm \frac{b}{a}\sqrt{(x-h)^2-a^2} - \left(k \pm \frac{b}{a}(x-h)\right) = 0.$ Este límite es del tipo $0\cdot\infty$ y se resuelve reacomodando el límite como el límite de un cociente y aplicando luego la regla de L'Hospital.

En resumen,

Hipérbolas.



Ejemplo 2.1

Identifique y trace la gráfica de la cónica de ecuación $4y^2-9x^2+36x-24y-36=0$, indicando centro, vértices, focos, asíntotas e intersección con los ejes.

Solución: Completando cuadrados obtenemos

$$4(y-3)^2-9(x-2)^2=36$$

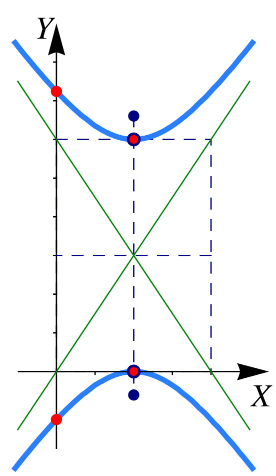
por lo que la ecuación canónica es

$$\frac{(y-3)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{4}=1$$

Se trata de un hipérbola con eje transversal vertical y centro en $(2,3)$.

Como $a=3$ y $b=2$ entonces $c=\sqrt{13}$. Los vértices son $v_1=(2,0)$ y $v_2=(2,6)$ y los focos son $F_1=(2,3-\sqrt{13})$ y $F_2=(2,3+\sqrt{13})$.

Las intersecciones con los ejes: $y\approx-1.24$, $y\approx 7.24$ y $x=2$.



Ejemplo 2.2

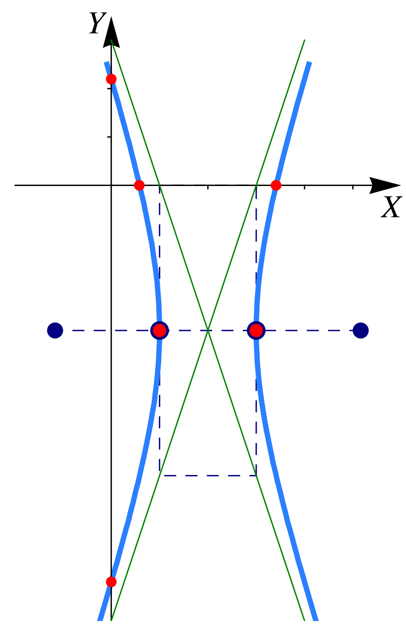
Hallar la ecuación canónica, los focos, los vértices y las asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es $9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0$. Realizar la gráfica.

Solución: Completando el cuadrado en ambas variables,

$$\begin{aligned} 9\left(x^2 - 4x + 4 - 4\right) - \left(y^2 + 6y + 9 - 9\right) + 18 &= 0 \\ 9(x-2)^2 - (y+3)^2 &= 9 \\ \frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(y+3)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto,

- el centro está en $(2, -3)$, $a = 1$, $b = 3$ y $c^2 = a^2 + b^2 \implies c^2 = 10 \implies c = \sqrt{10}$
- Los vértices están en $(1, -3)$, $(3, -3)$, los focos en $(2 \pm \sqrt{10}, -3)$
- Las asíntotas son $y = \pm 3(x-2) - 3$.
- Las intersecciones con los ejes son $y \approx -8.19$, $y \approx 2.196$, $x \approx 0.58$ y $x \approx 3.41$.



Ejemplo 2.3

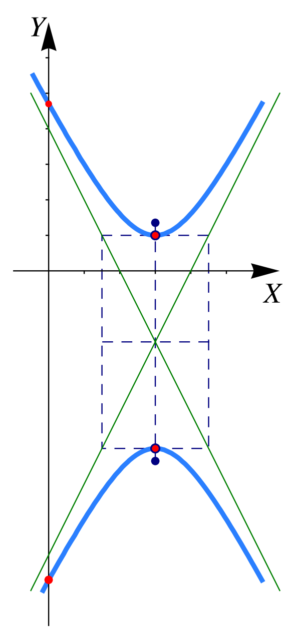
Hallar la ecuación canónica de la hipérbola con vértices en $(3, -5)$ y $(3, 1)$ y asíntotas $y = 2x - 8$ y $y = -2x + 4$. Además calcule los focos y realice la gráfica.

Solución: Como los vértices son vértices en $(3, -5)$ y $(3, 1)$, el centro es $(3, -2)$. Además, la hipérbola tiene eje transversal vertical y $a = 3$. Por otro lado, por el teorema de las asíntotas,

$$m_1 = 2 = \frac{a}{b} \implies b = \frac{a}{2} \implies b = \frac{3}{2}$$

Por tanto, la ecuación canónica es

$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{\frac{9}{4}} = 1$$



El valor de c está dado por

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c^2 = \frac{45}{4} \Longrightarrow c = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Los focos están en $(3, -2 - \frac{3\sqrt{5}}{2})$ y $(3, -2 + \frac{3\sqrt{5}}{2})$. Las intersecciones con el eje Y son $y \approx -8.70$, $y \approx 4.70$.

2.2 Ejercicios

2.2.1 Determine la ecuación canónica y los demás elementos de las hipérbolas de ecuación

a.) $36x^2 - 64y^2 = 2304$

b.) $x^2 - 2x - y^2 - 6y + 9 = 0$

c.) $-\frac{9}{5} + 2x + x^2 - \frac{6y}{5} - \frac{y^2}{5} = 0$

d.) $\frac{4x^2}{3} - \frac{16x}{3} - \frac{y^2}{5} + 2y - \frac{2}{3} = 0$

2.2.2 Determine la ecuación canónica de la hipérbola con focos en $(1,4)$ y $(1,-4)$ y con $a = 3$.

2.2.3 Determine la ecuación canónica de la hipérbola con centro en $(-4,1)$ y un vértice en $(2,1)$ y semieje conjugado de longitud 4.

2.2.4 Determine la ecuación canónica de la hipérbola de ecuación $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$.

2.2.5 Determine la ecuación canónica de la hipérbola con vértices en $(0,2)$ y $(6,2)$ y asíntotas $y = 2/3x \wedge y = 4 - 2/3x$.

2.2.6 Determine la ecuación canónica de la hipérbola que contiene al punto $(4,6)$ y cuyas asíntotas son $y = \pm\sqrt{3}\,x$.

2.2.7 Determine la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y que contiene los puntos $(3,1)$ y $(9,5)$.

2.2.8 Determine la ecuación canónica y realice la representación gráfica de la hipérbola cuyo eje focal es paralelo al eje X, el centro es $(2,0)$, una asíntota tiene ecuación $y = 2x - 4$ y un foco está a una distancia de $\sqrt{5}$ unidades del centro.

2.2.9 Determine la ecuación canónica de de la hipérbola que satisface simultáneamente las siguientes condiciones,

a.) El centro de la hipérbola coincide con el vértice de la parábola de ecuación $y^2 - 2y + 8x + 17 = 0$.

b.) Uno de sus focos se ubica en $(3,1)$

c.) Uno de sus vértices se ubica en $(1,1)$.

Realice la gráfica e indique sus principales características.

R **2.2.10** Determine el tipo de cónica representada por la ecuación $\dfrac{x^2}{k}+\dfrac{y^2}{k-16}=1$ en los casos

a.) Si $k>16$

b.) Si $0<k<16$

c.) Si $k<0$

R **2.2.11** Determine la ecuación canónica y las características de la cónica que contiene a los puntos $P=(x,y)$ para los cuales $|d(P,A)-d(P,B)|=2$ donde $A=(-3,0)$ y $B=(-3,3)$. Realizar la gráfica.

R **2.2.12** Realice el dibujo de la sección cónica de ecuación $9(x-1)^2-(y+1)^2=9$. Indique además todas sus características.

R **2.2.13** En la definición de la hipérbola como un lugar geométrico se indica que $2a<d(F_1,F_2)$. ¿Qué pasa si $2a\geqslant d(F_1,F_2)$?

2.3 Solución de los ejercicios

2.2.1 R

a.) La ecuación canónica es
$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$$
Como $c=10$, los focos son $(\pm10,0)$ y los vértices son $(\pm8,0)$. La ecuación de las asíntotas es $3x-4y=0$ y $3x+4y=0$.

b.) La ecuación canónica es
$$(x-1)^2-(y+3)^2=1$$
El o la estudiante debe completar la respuesta.

c.) La ecuación canónica es
$$(x+1)^2-\frac{(y+3)^2}{5}=1$$
El o la estudiante debe completar la respuesta.

d.) La ecuación canónica es
$$\frac{(x-2)^2}{3/4}-\frac{(y-5)^2}{5}=1$$
El o la estudiante debe completar la respuesta.

2.2.2 R La ecuación canónica es $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{(x-1)^2}{7}=1.$

2.2.3 R El centro es $(-4,1)$. $a=6$ y $b=4$. La ecuación canónica es $\dfrac{(x+4)^2}{36}-\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$.

2.2.4 R La ecuación canónica es $\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$. Vértices en $(-3,2)$, $(5,-2)$ y focos en $(-4,-2),(6,-2)$. Las asíntotas son $y=\pm\dfrac{3}{4}(x-1)-2$.

2.2.5 R La ecuación canónica es

$$\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1.$$

Como $c=\sqrt{13}$, los focos son $(3\pm\sqrt{13},2)$ y los vértices son $(3\pm 3,2)$.

2.2.6 R Como $\sqrt{3}\cdot 4>6$, la asíntota $y=\sqrt{3}\,x$ va por arriba del punto $(4,6)$. Esto nos dice que la ecuación de la hipérbola es $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Como $(4,6)$ está en la hipérbola y como $b^2=3a^2$, entonces $\dfrac{16}{a^2}-\dfrac{36}{3a^2}=1 \implies a=4$. Así, la ecuación canónica es

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1.$$

2.2.7 R La opción que sirve es $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Evaluando los puntos se obtiene que la ecuación canónica es $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

La opción $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ se descarta pues se evaluando los puntos se obtiene $a^2=-6$.

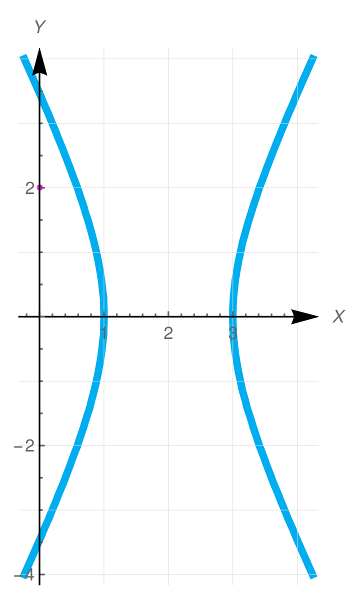
2.2.8 R Según los datos, la ecuación de la cónica es

$$\frac{(x-2)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Como una asíntota es $y=2x-4 \implies \dfrac{b}{a}=2$, entonces tenemos

$$\begin{cases}\dfrac{b}{a} &= 2\\ 5 &= a^2+b^2\end{cases} \implies a=1 \quad\wedge\quad b=2$$

$$\therefore\ \frac{(x-2)^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$$

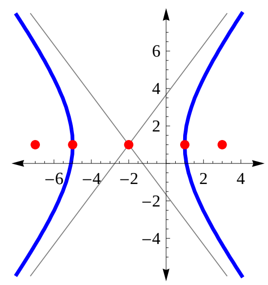


2.2.9 R La parábola tiene ecuación canónica $(y-1)^2 = -8(x+2)$, por tanto el centro de la hipérbola es $(-2,1)$.

Como un foco esta en $(3,1)$ y un vértice esta en $(1,1)$, el eje transversal es paralelo al eje X, $a=3$, $c=5$ y $b=4$. La ecuación canónica es

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1.$$

Sus focos son $(3,1)$, $(-7,1)$ y sus vértices $(1,1)$, $(-5,1)$. Las asíntotas son $y = \pm\frac{4}{3}(x+2)+1$. La hipérbola interseca al eje X en $x \approx -5.093$ y $x \approx 1.0933$.



2.2.10 R

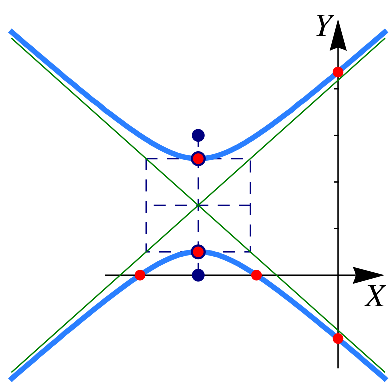
a.) Como $k>0$ y $k-16>0$, se trata de una elipse.
b.) Como $k>0$ y $k-16<0$, se trata de una hipérbola.
c.) Como $k<0$ y $k-16<0$, la ecuación no tiene solución, es decir, no es la ecuación de una curva.

2.2.11 R Se trata de un hipérbola con focos A y B y por tanto $c=1.5$ y el centro es $(h,k)=(-3,\ 3/2)$.

Como $|d(P,F_1)-d(P,F_2)| = 2a$ entonces $a=1.$ y entonces $b^2 = 5/4$. Luego ecuación canónica es

$$\frac{(y-\frac{3}{2})^2}{1} - \frac{(x+3)^2}{5/4} = 1$$

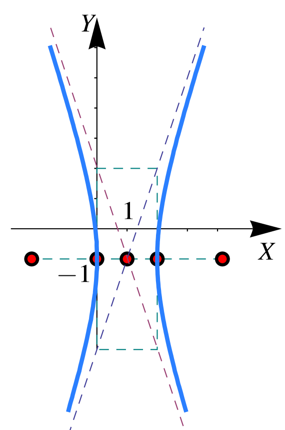
Las asíntotas son $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5/4}}(x+3)+3/2$. La intersección con los ejes son $y \approx -1.363$, $y \approx 4.363$, $x \approx -4.25$ y $x \approx -1.75$,



2.2.12 R Se trata de una hipérbola.

La ecuación canónica es $(x-1)^2 - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1.$

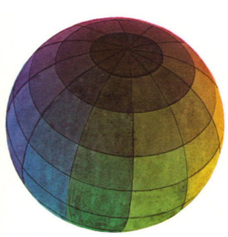
- Centro $(1,-1)$,
- $a^2 = 1$ y $b^2 = 9$,
- $c^2 = 1+9 \implies c = \sqrt{10}$,
- Focos $(1\pm\sqrt{10},\ -1)$.
- Asíntotas: $y = \pm\dfrac{3}{1}(x-1)-1$.



2.2.13

Citar como:

Walter Mora F. *Cálculo en Varias Variables. Visualización interactiva.* (2019) 2da ed. [ebook] Cartago, Costa Rica. Revista digital, Matemática, Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/.



Revisado: Julio, 2022

Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF: https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

http://www.matematicainteractivacr.com/