Instituto Tecnológico de Costa Rica
TEC| ESCUELA DE MATEMÁTICA CÁLCULO SUPERIOR

SEMANA 2: Funciones en varias variables

Dominio de funciones de dos variables

Revista de Matemática/Libros
W. Mora. "Cálculo en Varias Variables."

Las aplicaciones interactivas requieren haber instalado la aplicación gratuita Wolfram CDFPlayer
https://www.wolfram.com/cdf-player/

Wolfram CDF Player

Contenido

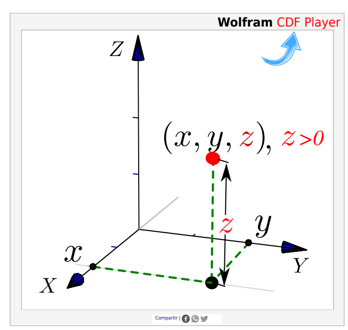
■

2.3 Espacio tridimensional. Coordenadas cartesianas.

Una vez que se ha especificado una unidad de medida, un número $x \in \mathbb{R}$ puede ser usado para representar un punto en una línea, un par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se puede usar para representar un punto en un plano,

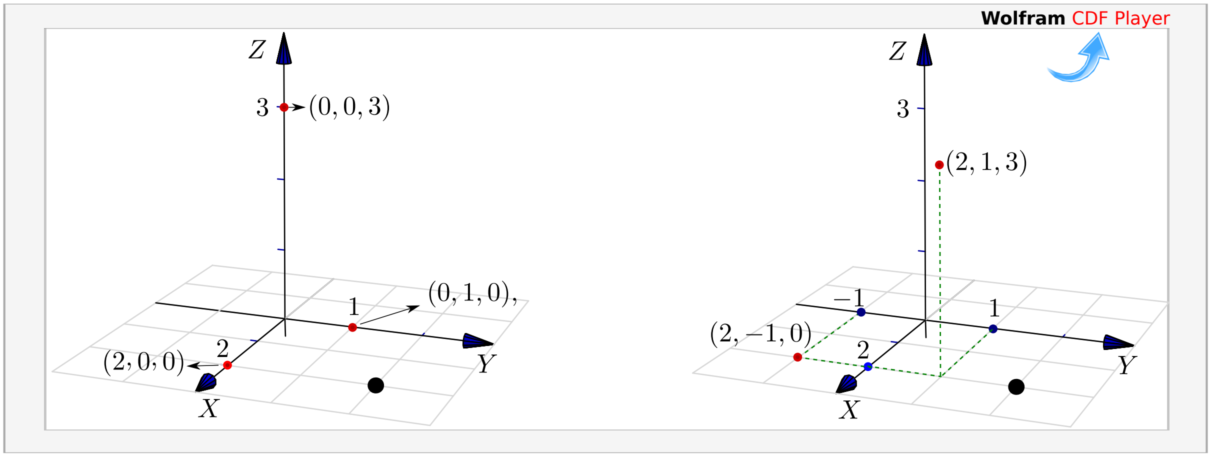
(**a**) Punto en una línea (**b**) Punto en el plano

De manera análoga, un triple $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se puede usar para representar un punto en el espacio tridimensional. Tomamos un punto fijo cualquiera O, llamado *origen*, y tres planos distintos, mutuamente perpendiculares, que pasan por O. Los planos se intersecan en pares en tres rectas (ejes) mutuamente perpendiculares que pasan por O llamadas X, Y y Z. Para hacer la representación en un plano podemos trazar el eje Y y el eje Z de frente y la parte positiva del eje X se representa en una dirección aproximadamente sur-oeste, para simular profundidad (perpectiva). Dibujamos (x,y) en el plano XY y, desde este punto, dibujamos un segmento paralelo al eje Z y orientado de acuerdo al signo de z y de longitud $|z|$, como se muestra en la figura.



Ejemplo 2.1

Los puntos en el eje X tienen coordenadas $(x,0,0)$, $x \in \mathbb{R}$, los puntos en el eje Y tienen coordenadas $(0,y,0)$, $y \in \mathbb{R}$ y los puntos en el eje Z tienen coordenadas $(0,0,z)$, $z \in \mathbb{R}$. En la figura que sigue se muestran cinco ejemplos de puntos en el espacio.



Planos XY, XZ **y** YZ**.** Hay tres planos que contienen un par de ejes coordenados: El plano XY es el plano que contiene el eje X y el eje Y, el plano XZ es el plano que contiene el eje X y el eje Z y el plano YZ es el plano que contiene el eje Y y el eje Z.

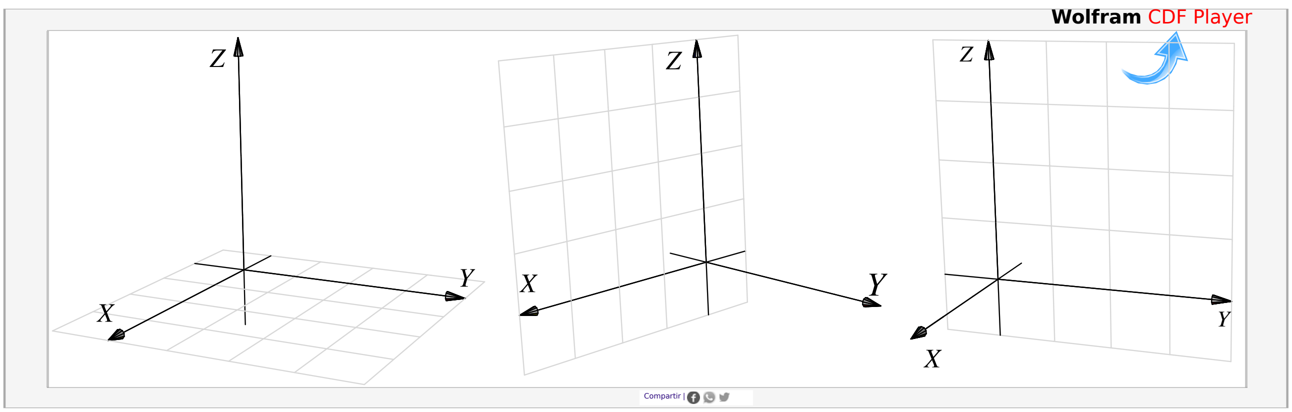


Figura 2.1: Planos XY, XZ y YZ

El primer octante. Los planos XY, XZ y YZ dividen el espacio en ocho partes llamadas *octantes*. El primer octante corresponde a la parte positiva de los ejes.

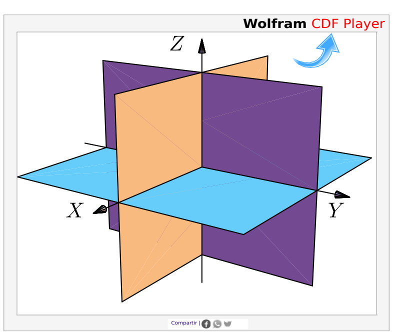


Figura 2.2: Octantes

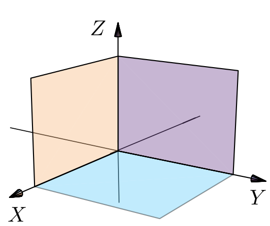


Figura 2.3: Primer octante

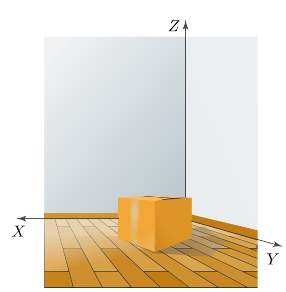


Figura 2.4: Habitación en el primer octante

2.4 Funciones escalares de dos variables

Definición 2.1

Una función escalar de dos variables $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$, asigna a cada par $(x, y) \in D$, un único número real denotado con $f(x, y)$. El gráfico de f es el conjunto $G_f = \{(x, y, z) : x, y \in D \text{ y } z = f(x, y)\}$.

La **representación gráfica** de f en un dominio D, corresponde a la representación de todos los puntos (x, y, z) que satisfacen la ecuación $z = f(x, y)$ o $F(x, y, z) = 0$, con $(x, y) \in D$.

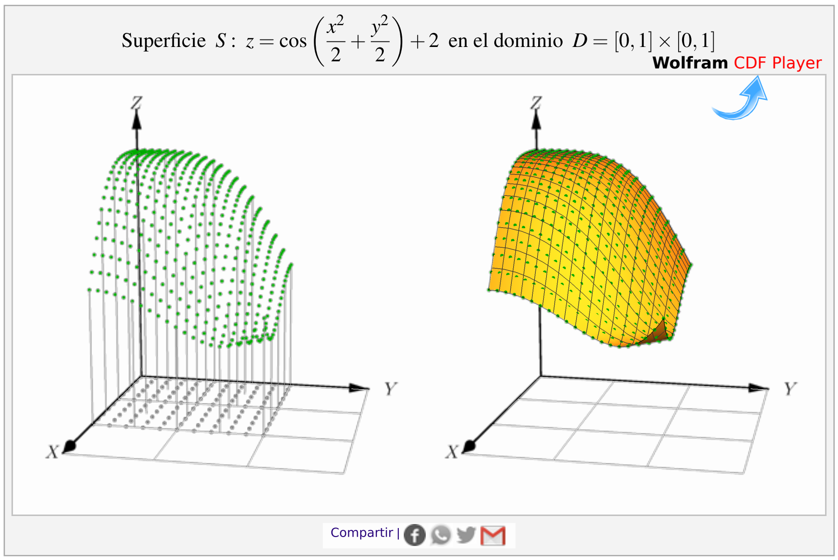


Figura 2.5: Representación gráfica de la superficie $S: \; z = \cos\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right) + 2$ en el dominio $D = [0, 1] \times [0, 1]$

El criterio (fórmula) que define a f puede ser explícito o implícito. Para hablar de una función de dos variables se escribe $z = f(x, y)$ o $F(x, y, z) = 0$. Es usual asociar la representación gráfica de f con su ecuación y hablar informalmente de "la superficie" S de ecuación $z = f(x, y)$, o brevemente, "la superficie $S: \; z = f(x, y)$"

Ejemplo 2.2

- Forma explícita: Sea $S: \; z = x^2 + y^2$ o equivalentemente $S: \; f(x, y) = x^2 + y^2$.

  a.) $f(1, 2) = 1^2 + 2^2 = 5 \implies (1, 2, 5) \in S$

  b.) $f(0, 3) = 0^2 + 3^2 = 9 \implies (0, 3, 9) \in S$

- Forma implícita: Sea $S : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1$, entonces $S : \; F(x, y, z) = 0$ con $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

a.) Como $1^2+0^2+0^2-1=0 \implies F(1,0,0)=0 \implies (1,0,0)\in S$

b.) Si $(1,1,z)\in S \implies 1^2+1^2+z^2-1=0 \implies z=\pm 1$

Dominio y representación gráfica del dominio

Como en funciones de una variable, el **dominio máximo** de f es el conjunto de puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $z=f(x,y)$ esté bien definida. Escribimos $D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } \exists\, z\in\mathbb{R} \text{ con } z=f(x,y)\right\}$. En el caso de funciones definidas de manera implícita, tenemos $D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } \exists\, z\in\mathbb{R} \text{ con } F(x,y,z)=0\right\}$.

Ejemplo 2.3

El dominio de la función $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ es $D_f=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

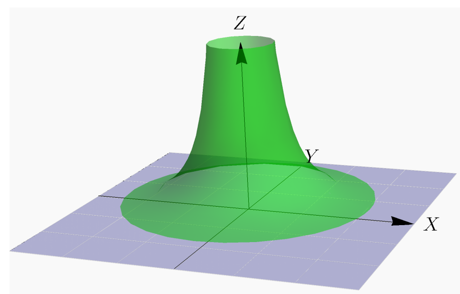


Figura 2.6: $D_f=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

Representación gráfica de dominios definidos por desigualdades. El dominio de una función escalar $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ es a veces una región en el plano, definida por desigualdades y por igualdades. Para hacer la representación gráfica del dominio de f, necesitamos dibujar regiones con ecuaciones del tipo $x\leqslant g(y)$ o $x<g(y)$ o $y\leqslant h(x)$ o $y<h(x)$.

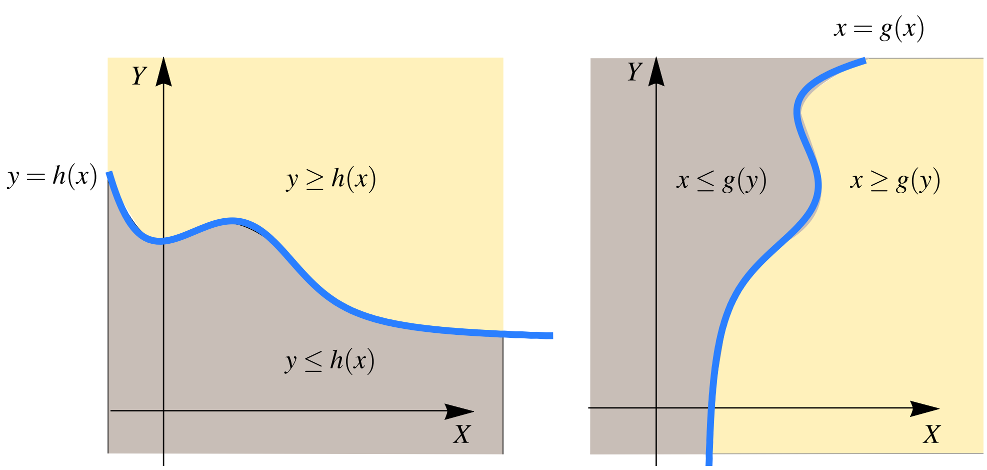


Figura 2.7: Representación de regiones definidas por desigualdades

Ejemplo 2.4

Determine el dominio de la función $z=\dfrac{\sqrt{x-y+1}+\sqrt{y}}{\ln(x^2-y)}$ y realice la representación gráfica de este dominio.

Solución: El dominio de esta función esta conformado por pares ordenados (x, y) que satisfacen las siguientes restricciones:

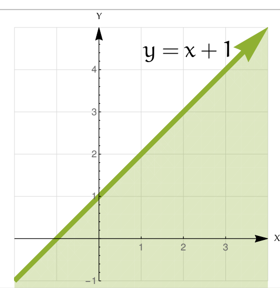
- Para $\sqrt{x-y+1}$ necesitamos $x-y+1 \geqslant 0$
- Para $\sqrt{y}$ necesitamos $y \geqslant 0$
- Para $\ln(x^2-y)$ necesitamos $x^2-y \neq 1 \quad \wedge \quad x^2-y > 0$

$$\text{Dominio: } D_z = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x-y+1 \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^2-y>0 \ \wedge \ x^2-y \neq 1\right\}$$

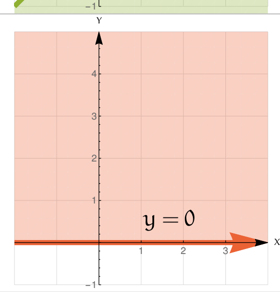
Representación gráfica. Para realizar la representación gráfica del dominio debemos realizar la representación gráfica de cada una de las regiones que se indican y obtener la intersección de estas tres regiones.

• Región 1: $x-y+1 \geqslant 0$	$\begin{cases} \text{El borde es la recta} & y = x+1 \\ \text{Región 1:} & y \leqslant x+1 \end{cases}$
• Región 2: $y \geqslant 0$	$\begin{cases} \text{El borde es la recta} & y = 0 \\ \text{Región 2:} & y \geqslant 0 \end{cases}$
• Región 3: $x^2-y \neq 1 \ \wedge \ x^2-y>0$	$\begin{cases} \text{El borde es la curva} & y = x^2 \\ \text{Región 3:} & y < x^2 \\ \text{Eliminar la curva} & y = x^2-1 \end{cases}$

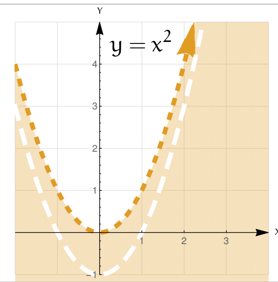
$$\begin{cases} \text{El borde es la recta} & y = x+1 \\ \text{Región 1:} & y \leqslant x+1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \text{El borde es la recta} & y = 0 \\ \text{Región 2:} & y \geqslant 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \text{El borde es la curva} & y = x^2 \\ \text{Región 3:} & y < x^2 \\ \text{Eliminar la curva} & y = x^2 - 1 \end{cases}$$



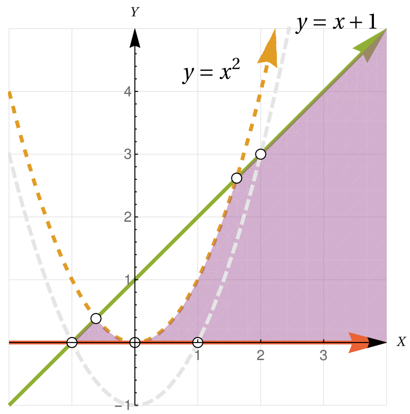


Figura 2.8: Representación gráfica del dominio de la función

Ejemplo 2.5

Determine y realice la representación gráfica del dominio de la función $f(x, y) = \ln(x - y^2) + \sqrt{1 - y^2 - \dfrac{x^2}{2}}$

Solución: Necesitamos que $x - y^2 > 0$ y que $1 - y^2 - \dfrac{x^2}{2} \geqslant 0$, es decir,

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x > y^2 \quad \text{y} \quad y^2 + \frac{x^2}{2} \leqslant 1\right\}$$

Representación gráfica: El dominio de f es la *intersección* de la región $x > y^2$ (región a la derecha de la parábola $x = y^2$, sin incluirla) y de la región $y^2 + \dfrac{x^2}{2} \leqslant 1$ (el interior de la elipse $y^2 + \dfrac{x^2}{2} = 1$ incluyendo la elipse).

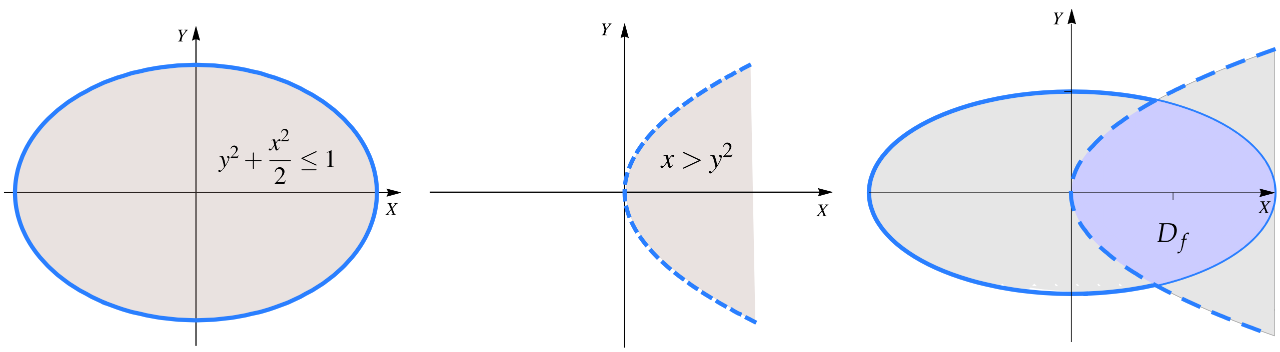


Figura 2.9: $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x > y^2 \text{ y } y^2 + \frac{x^2}{2} \leqslant 1\right\}$

En la figura que sigue aparece la superficie y su dominio.

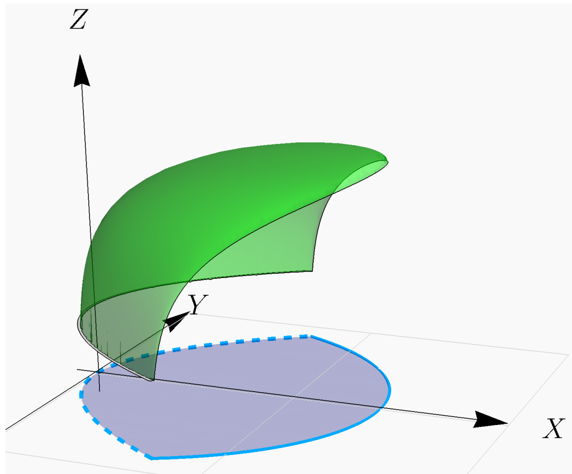


Figura 2.10: Suerficie $f(x,y) = \ln(x - y^2) + \sqrt{1 - y^2 - \frac{x^2}{2}}$ y su dominio

2.5 Ejercicios

(R) **2.5.1** Considere la función $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{(x-4)^2 + y^2 - 1}}{xy}$. Indique el dominio máximo de f y realice la representación gráfica.

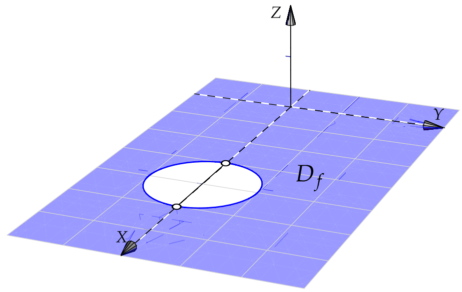
(R) **2.5.2** Considere la función $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{(y+1)^2 - x - 1}}{\log(x-y)}$. Indique el dominio máximo de f y realice la representación gráfica.

(R) **2.5.3** Considere la función $f(x,y) = \dfrac{3y - 6x + 3}{\ln(1-x) + 1}$. Indique el dominio máximo de f y realice la representación gráfica.

(R) **2.5.4** Considere la función $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{4}}}{x - y} + \sqrt{x - y}$. Indique el dominio máximo de f y realice la representación gráfica.

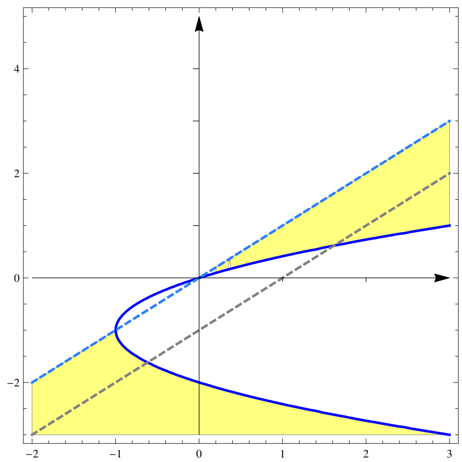
2.6 Solución de los ejercicios

2.5.1 (R) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (x-4)^2 + y^2 \geqslant 1 \text{ y } x \neq 0 \text{ y } y \neq 0.\}$ Este dominio corresponde al exterior de la elipse (incluye el borde) y se debe excluir los ejes X y Y (líneas punteadas).



2.5.2 R Como $\log(1) = 0$ debemos excluir los puntos para los cuales $x - y = 1$.

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (y+1)^2 \geqslant x + 1 \text{ y } y \neq x - 1 \text{ y } y < x\}$



2.5.3 R Se omite

2.5.4 R Se omite

Citar como:

Walter Mora F. *Cálculo en Varias Variables. Visualización interactiva.* (2019) 2da ed. [ebook] Cartago, Costa Rica. Revista digital, Matemática, Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/.

Revisado: Julio, 2022

Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF: https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

http://www.matematicainteractivacr.com/