Instituto Tecnológico de Costa Rica

TEC| ESCUELA DE MATEMÁTICA — CÁLCULO SUPERIOR

SEMANA 1: Secciones cónicas I

Parábola y Elipse

Revista de Matemática/Libros
W. Mora. "Cálculo en Varias Variables."

Las aplicaciones interactivas requieren haber instalado la aplicación gratuita Wolfram CDFPlayer
https://www.wolfram.com/cdf-player/

Wolfram CDF Player

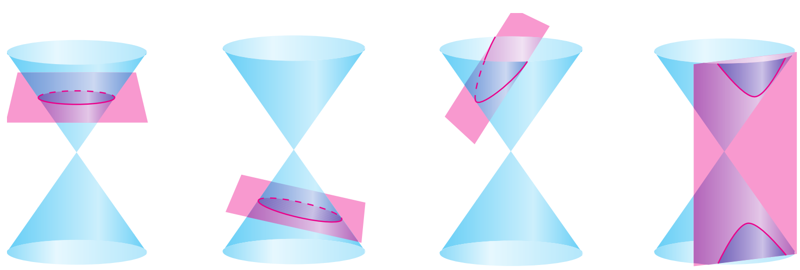
Contenido

1.1 Introducción. 1
1.2 La Parábola 2
1.3 Ejercicios 8
1.4 La Elipse 9
1.5 Ejercicios 15
1.6 Solución de los ejercicios 18
Licencia Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0 25

■

1.1 Introducción.

Las secciones cónicas son curvas se pueden obtener como curvas de intersección entre un plano y un cono. Las cónicas "propias" son la parábola, la elipse y la hipérbola. La circunferencia es un caso especial de elipse.



Círculo   Elipse   Parábola   Hipérbola

En coordenadas rectangulares, una cónica tiene "ecuación general"

$$A\,x^2 + B\,xy + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

Usando la teoría de formas cuadráticas podemos obtener un criterio para *identificar* (o "clasificar") las cónicas a partir de su ecuación general.

Teorema 1.1

Sea **C** la cónica de ecuación $A\,x^2+B\,xy+C\,y^2+D\,x+E\,y+F=0$. Si $\Delta = 4ACF-AE^2-B^2F+BDE-CD^2$, entonces

a.) si $B^2-4AC=0$ y $\Delta \neq 0$, tenemos que **C** una parábola.

b.) si $B^2 - 4AC < 0$ y $\Delta \neq 0$, tenemos que **C** una elipse.

c.) si $B^2 - 4AC > 0$ y $\Delta \neq 0$, tenemos que **C** una hipérbola.

Lugares geométricos. Informalmente, un "lugar geométrico" es el "rastro" o la "huella" que deja un punto que se mueve de acuerdo a una ley especificada. En lo que a nosotros concierne, usaremos esta definición: Un "lugar geométrico" es el conjunto de todos los puntos (usualmente los puntos de una curva o una superficie) que satisfacen algún criterio o propiedad.

Ejemplo 1.1 (Lugar geométrico).

Una circunferencia en el plano es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto **O** llamado "centro".

Nos interesa *la ecuación en coordenadas rectangulares* de la curva que se forma: Una circunferencia de radio a está formada por todos los puntos (x, y) que están a una distancia "a" del centro $\mathbf{O = (h, k)}$. Entonces

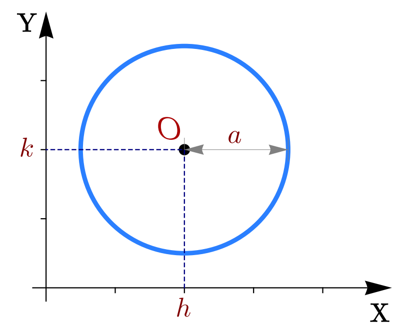


Figura 1.1: Lugar geométrico

$$||(x,y)-(h,k)|| = a \implies \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = a$$

$$\implies (x-h)^2+(y-k)^2 = a^2$$

La ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2 = a^2$ es la versión en coordenadas rectangulares para una circunferencia de centro (h, k) y radio a.

1.2 La Parábola

Definición 1.1 (La parábola como lugar geométrico).
En un plano, una parábola es el lugar geométrico de todos los puntos Q equidistantes de un punto fijo F (llamado *foco*) y de una recta fija ℓ (llamada *directriz*) que no contiene a F, es decir, $d(Q, F) = d(Q, \ell)$.

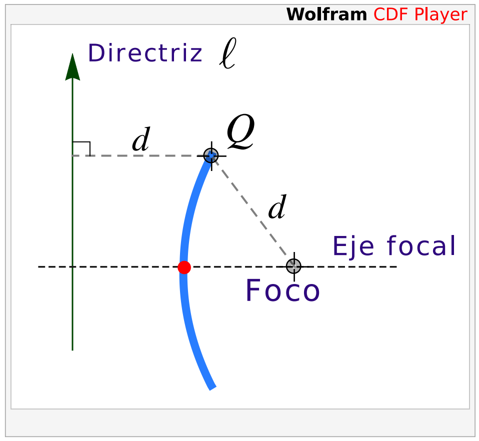
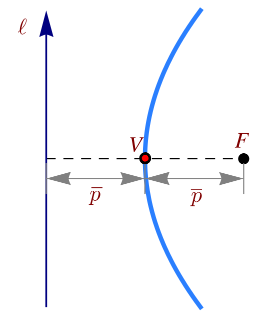


Figura 1.2: Parábola



Directriz, eje, vértice y foco. La recta que pasa por el foco F y es perpendicular a la directriz ℓ se llama "eje" o "eje de simetría". El punto de la parábola que está sobre este eje transversal se llama *vértice* y lo denotamos con V. Por la definición de la parábola, el vértice está a la misma distancia de la recta ℓ y del Foco. Esta distancia la denotamos con $\overline{p}$

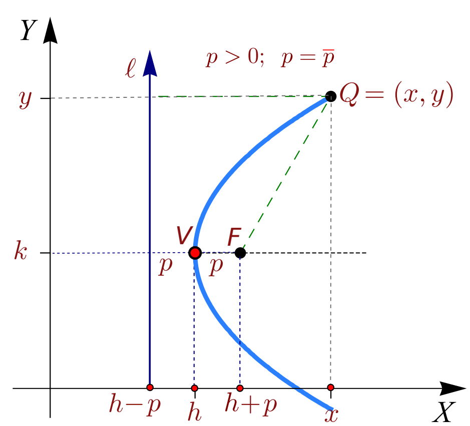
Ecuación canónica.

En coordenadas rectangulares, una parábola tiene ecuación general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ con } B^2 - 4AC = 0 \text{ y } \Delta \neq 0$$

Si $B \neq 0$, el "eje focal" no es paralelo al eje X ni al eje Y. En este caso, la parábola presenta una rotación respecto a estos ejes. La rotación se puede eliminar (respecto a los nuevos ejes X', Y') haciendo un cambio de variable (ver apéndice A del libro base).

Si $B = 0$, la cónica está en posición estándar y la directriz es paralela al eje X o paralela al eje Y.



Parábola en posición estándar: Directriz paralela al eje Y (o eje focal paralelo al eje X). Si la directriz es paralela al eje Y y si $V = (h, k)$, entonces hay dos posibilidades: la parábola abre a la izquierda o abre a la derecha.

En el caso de que la parábola abre a la derecha, el foco es

$$F = (h + \overline{p}, k)$$

Los puntos $Q = (x, y)$ de la parábola satisfacen $d(Q, F) = d(Q, \ell)$, es decir,

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-h-\overline{p})^2+(y-k)^2} &= x-h+\overline{p}\\
(x-h-\overline{p})^2+(y-k)^2 &= (x-h+\overline{p})^2\\
(y-k)^2 &= 4\overline{p}(x-h)^2
\end{aligned}$$

Como $\overline{p}>0,$ entonces $x\geqslant h$ como se espera. Así, si la parábola abre hacia la derecha, su *ecuación canónica* es

$$(y-k)^2=4p(x-h) \text{ con } p>0.$$

En el caso de que la parábola abra a la izquierda, el foco es $F=(h-\overline{p},k)$. Los puntos $Q=(x,y)$ de la parábola satisfacen $d(Q,F)=d(Q,L)$. Procediendo como antes,

$$\sqrt{(x-h+\overline{p})^2+(y-k)^2} \;=\; x-h-\overline{p} \;\Longrightarrow\; (y-k)^2=4p(x-h) \text{ con } p=-\overline{p}.$$

Como $p=-\overline{p},$ el foco es $F=(h+p,k)$ nuevamente.

En ambos casos, la ecuación simplificada es $(y-k)^2=4p(x-h)$ donde $\overline{p}=|p|$. Con esta notación, si $p>0,$ la parábola abre a la derecha y si $p<0,$ la parábola abre a la izquierda. Esta ecuación es llamada *ecuación canónica* o *natural*. Esta ecuación es especial pues contiene la información del vértice, el foco y la directriz.

Parábola $(y-k)^2=4p(x-h)$

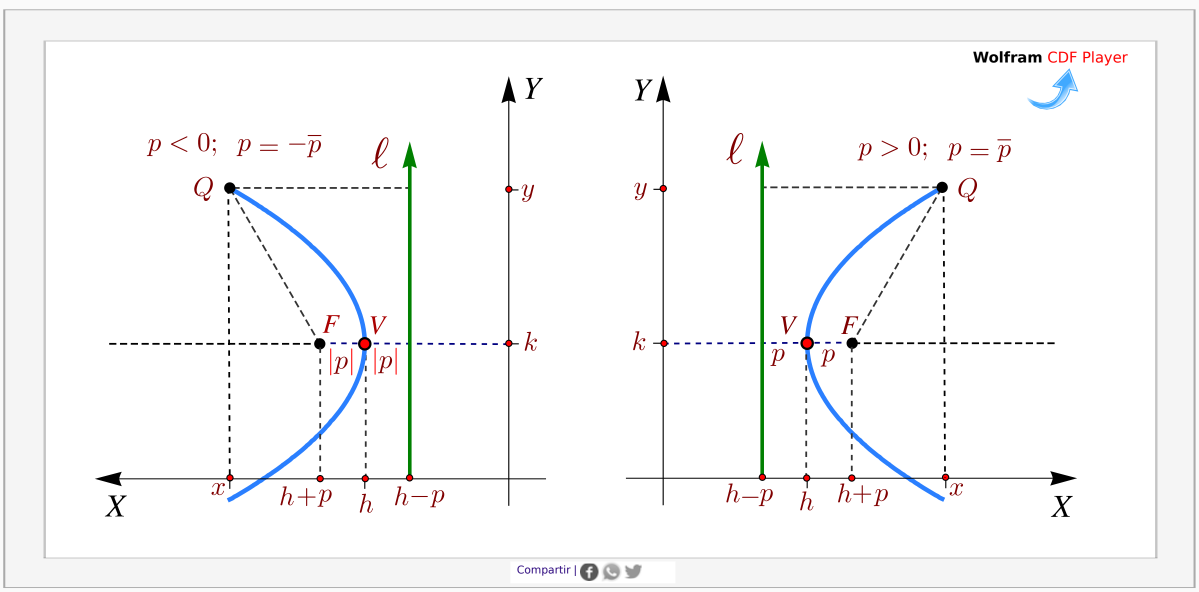


Figura 1.3: Parábola con directriz $\ell:\ y=h-p$, paralela al eje Y.

Ecuación canónica de la parábola $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

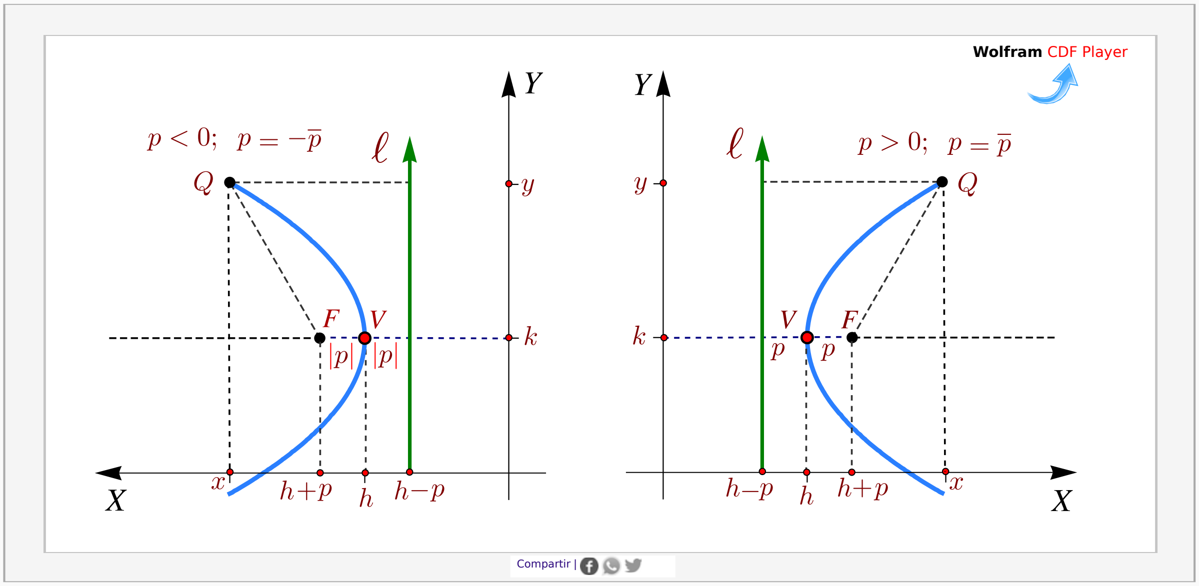


Figura 1.4: Parábola con directriz $\ell:\ y = h - p$, paralela al eje Y.

Ejemplo 1.2

Hallar la ecuación canónica, el vértice, el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es $y^2 - 6y - 2x + 17 = 0$. Además realice la gráfica.

Solución: Para hallar la ecuación canónica debemos completar cuadrados.

$$\begin{aligned} y^2 - 6y - 2x + 17 &= 0 \\ \left(y + \frac{-6}{2\cdot 1}\right)^2 - \frac{6^2}{4\cdot 1} - 2x + 17 &= 0 \\ (y-3)^2 - 9 - 2x + 17 &= 0 \\ (y-3)^2 &= 2\,(x-4) \end{aligned}$$

- El vértice es $V = (4,3)$ y como $4p = 2 \implies p = 1/2 > 0$.
- La parábola abre hacia la derecha y tiene el foco en $F = (4 + \frac{1}{2},\ 3)$.
- La directriz es la recta de ecuación $\ell:\ x = 4 - \frac{1}{2}$. La gráfica se muestra en la figura.

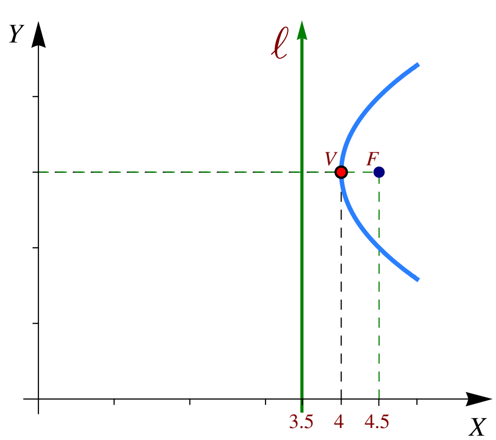
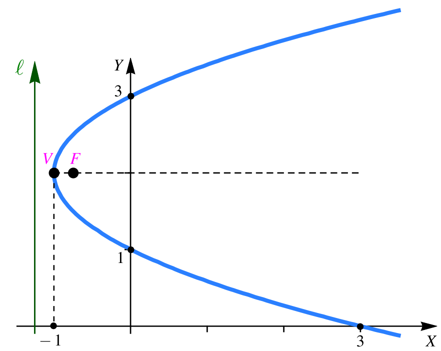


Figura 1.5: Parábola $(y-3)^2 = 2\,(x-4)$

Ejemplo 1.3

Hallar la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(-1,2)$ y que contiene los puntos $(0,3)$ y $(0,1)$. Indique las características principales y realizace la representación gráfica.

Solución: Es conveniente hacer un dibujo y representar los datos. De acuerdo a la figura a al derecha, lo que tenemos es una parábola que abre a la derecha y su ecuación sería



$$(y-2)^2 = 4p(x+1)$$

Para determinar p usamos el hecho de que el punto $(0,3)$ está en la parábola y, por tanto, satisface la ecuación: Sustituyendo $x=0$ y $y=3$ obtenemos

$$(3-2)^2 = 4p(0+1) \implies p = \frac{1}{4}$$

La ecuación de la parábola es $(y-2)^2 = (x+1)$

Observe que el otro punto $(0,1)$ solo lo usamos para establecer que la parábola abre a la derecha.

Características principales:

- Vértice $(-1,2)$
- Foco $\left(-1+\frac{1}{4},\, 2\right)$
- Directriz: La recta vertical $x = -1 - \frac{1}{4}$
- Intersección con el eje X en $x = 3$
- Intersección con el eje Y en $y = 1$ y $y = 3$

Parábola en posición estándar: Directriz paralela al eje X. De manera análoga al caso anterior, si la directriz es paralela al eje X (o el eje focal es paralelo al eje Y), entonces la *ecuación canónica* de la parábola es

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

de tal manera que si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba y si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo. En resumen, si la directriz es paralela al eje X o paralela al eje Y, y si el vértice es $V = (h,k)$, la ecuación canónica es

Ecuación canónica de la parábola$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

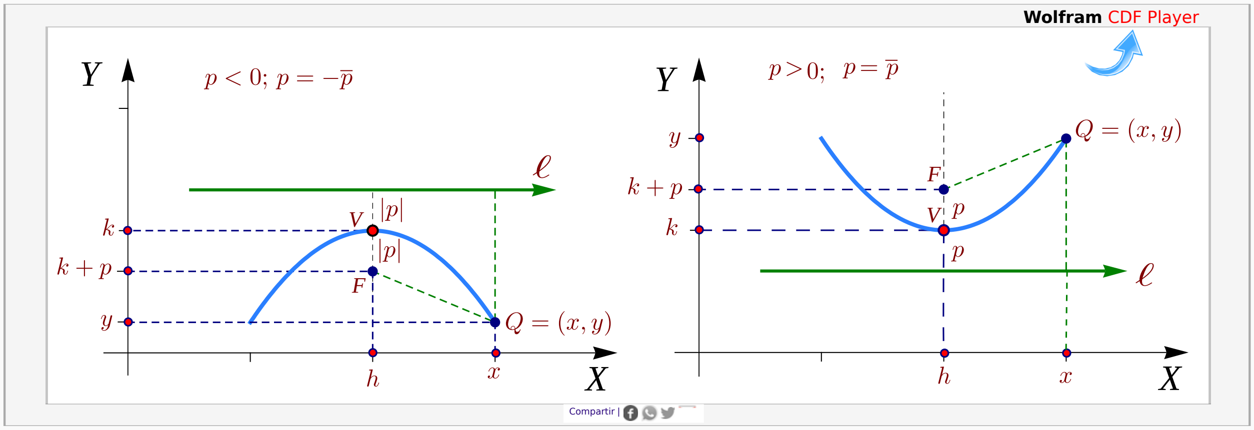


Figura 1.6: Parábola con directriz $\ell:\ y = k - p$, paralela al eje X.

Ejemplo 1.4

Hallar la ecuación canónica, el vértice, el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es $2x^2 - 4x - 2y - 4 = 0$. Además realice la gráfica.

Solución: Para hallar la ecuación canónica debemos completar cuadrados.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x - 2y - 4 &= 0 \\ 2\left(x + \frac{-4}{2\cdot 2}\right)^2 - \frac{4^2}{4\cdot 2} - 2y - 4 &= 0 \\ 2\,(x-1)^2 - 2 - 2y - 4 &= 0 \\ (x-1)^2 &= (y+3) \end{aligned}$$

- El vértice es $V = (1, -3)$ y como $4p = 1 \ \Rightarrow\ p = 1/4 > 0$.
- La parábola abre hacia la derecha y tiene el foco en $F = (1,\ -3 + \frac{1}{4})$.
- La directriz es la recta de ecuación $\ell:\ y = -3 - \frac{1}{4}$.
- Intersección eje $X:\ 2x^2 - 4x - 4 = 0 \implies x = 1 \pm \sqrt{3}$
- Intersección eje $Y:\ -2y - 4 = 0 \implies y = -2$

La gráfica se muestra en la figura.

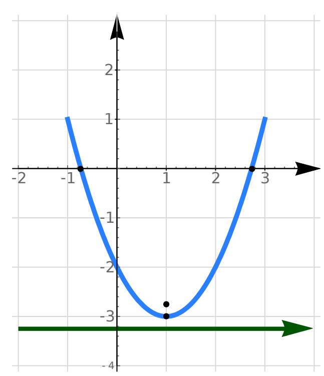


Figura 1.7: Parábola $(x-1)^2 = (y+3)$

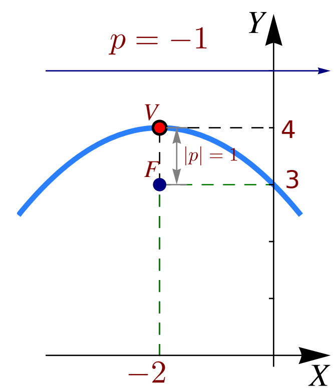
Ejemplo 1.5

Hallar la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(-2,4)$ y foco en $(-2,3)$. Realizar la gráfica.

Solución: Dado que el vértice y el foco tienen igual abscisa, el eje de la parábola es vertical, además las distancia entre el foco y el vértice es $|p|=1$ y como abre hacia abajo, $p=-1$. Entonces la ecuación canónica es,

$$(x+2)^2 = -4(y-4)$$

La directriz es la recta $y=5$. La gráfica se muestra en la figura.



1.3 Ejercicios

1.3.1 Determine la ecuación canónica de las siguientes parábolas,

a.) $y = 2x^2 - 4x + 1$.

b.) $-9y^2 - 8x - 3 = 0$

c.) $y^2 + 2y - 4x = 7$

d.) $x^2 + 2x - 2y + 5 = 0$

e.) $x^2 - y + 2 = 0$

1.3.2 Determine la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(1,3)$ y foco en $(2,3)$.

1.3.3 Determine la ecuación canónica de la parábola con eje focal paralelo al eje X y que pasa por los puntos $(0,0)$, $(-1,2)$ y $(-2,-2)$

1.3.4 Determine la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(-1,1)$ y directriz $y=0$.

1.3.5 Determine la ecuación canónica de la parábola con foco en $(3,4)$ y directriz $x=7$.

1.3.6 Determine la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(2,3)$, eje focal paralelo al eje Y y que pasa por el punto $(4,5)$.

Ⓡ **1.3.7** Determine la ecuación canónica y el foco de la parábola (o las parábolas) que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

a.) vértice en $(2,0)$,

b.) contiene al punto $P=(8,b)$ con $b>0$,

c.) la distancia de P a la directriz es 10,

d.) eje de simetría paralelo al eje Y.

Ⓡ **1.3.8** Determine la ecuación canónica y realice la representación gráfica (incluye foco e intersecciones con los ejes) de la parábola con vértice está en $(5,-2)$ y cuya directriz es la recta de ecuación $x=\dfrac{47}{9}$

Ⓡ **1.3.9** Hay *tres* parábolas que satisfacen simultáneamente las condiciones que siguen. Determine la ecuación canónica de cada una de estas parábolas y el valor de b en cada caso.

a.) Vértice en $(2,0)$,

b.) contiene al punto $P=(b,8)$ con $b>2$,

c.) la distancia de P a la directriz es 10.

Ⓡ **1.3.10** En la definición de la parábola como un lugar geométrico se indica que el foco no está en la directriz. ¿Qué pasa si el foco está en la directriz?

Ⓡ **1.3.11** Verificar que el vértice de la parábola $y=ax^2+bx+c$ es el punto $\left(-\dfrac{b}{2a},\,-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

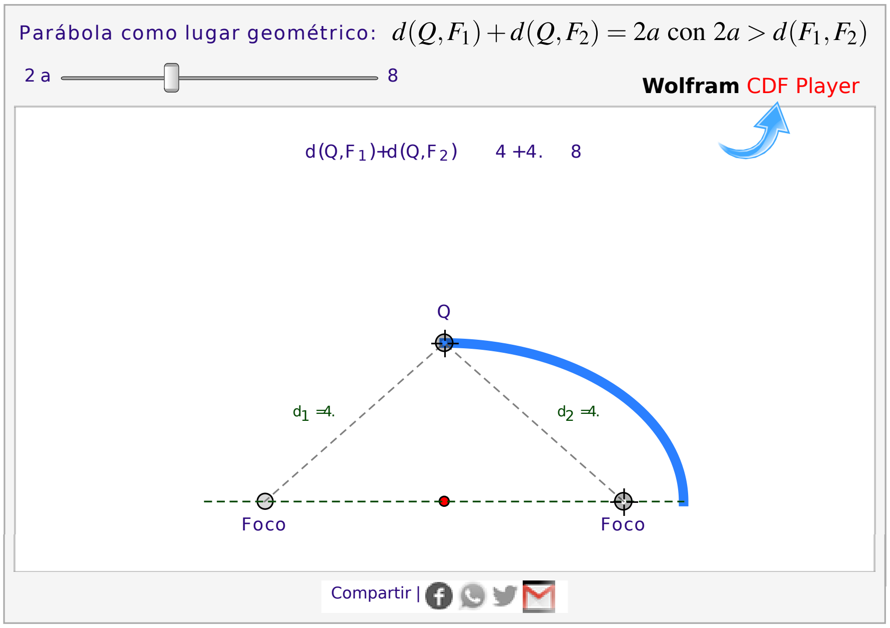
Ⓡ **1.3.12** Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos Q del plano XY tales que equidistan del punto $(2,3)$ y de la recta de ecuación $x=4$.

1.4 La Elipse

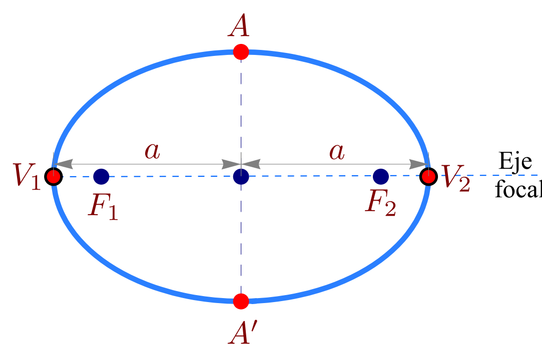
Definición 1.2 (La elipse como lugar geométrico).

En un plano, una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos Q cuya suma de distancias a dos puntos fijos, F_1 y F_2, (llamados *focos*), es constante (una constante mayor que $d(F_1,F_2)$). Si la suma es la constante $2a$, con $2a>d(F_1,F_2)$, entonces

$$d(Q,F_1)+d(Q,F_2)=2a$$

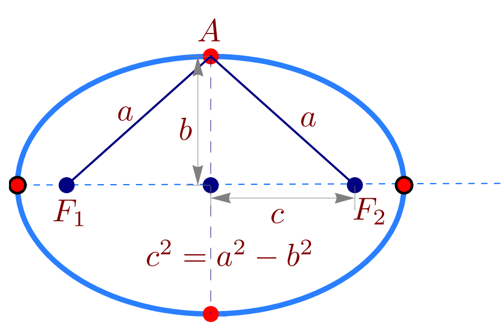


Eje menor, eje mayor, centro y vértices. Supongamos que los focos de la elipse son F_1 y F_2. Además, $d(Q,F_1)+d(Q,F_2)=2a$ con $2a>d(F_1,F_2)$. La recta que pasa por los focos se llama *eje focal.* Este eje focal corta a la elipse en dos puntos V_1, V_2 llamados *vértices.* El segmento de recta que une los vértices se llama *eje mayor.* El punto en la mitad del eje mayor se llama *centro* de la elipse. El *eje normal* es el eje que pasa por el centro y es perpendicular al eje focal. Este eje normal corta a la elipse en dos puntos A y A'. El segmento que une estos dos puntos se llama *eje menor.*



De acuerdo a la definición de la elipse, la distancia entre los vértices es $2a$ y cada vértice está a una distancia de a unidades del centro.

Si la longitud del semieje menor es b, entonces como el triángulo $\triangle F_1AF_2$ es isósceles, entonces $d(A,F_1)=a$ y se obtiene que la distancia de cada foco al centro es c con $c^2=a^2-b^2$.



Ecuación canónica.

En coordenadas rectangulares, una elipse tiene ecuación general

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \;\text{ con }\; B^2-4AC<0 \;\text{ y }\; \Delta\neq 0$$

Si $B\neq 0$, el "eje focal" no es paralelo al eje X ni al eje Y. En este caso, la elipse presenta una rotación respecto a estos ejes. La rotación se puede eliminar (respecto a los nuevos ejes X', Y') haciendo un cambio de variable (ver apéndice A del libro base).

Si $B=0$, la cónica está en posición el oje focal es paralela al eje X o paralela al eje Y.

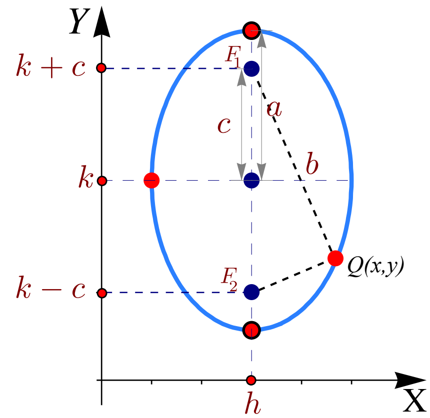
Elipse en posición estándar: Eje focal paralelo al eje Y. En este caso, si el centro es (h,k), entonces $F_1 = (h, k+c)$ y $F_2 = (h, k-c)$. Los puntos (x,y) de la elipse satisfacen

$$d((x,y),F_1) + d((x,y),F_2) = 2a,$$

es decir,

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k+c)^2} + \sqrt{(x-h)^2+(y-k-c)^2} = 2a$$

Ahora simplificamos la ecuación,



$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{(x-h)^2+(y-k+c)^2}\right)^2 &= \left(2a-\sqrt{(x-h)^2+(y-k-c)^2}\right)^2 \\
a^2 - c(y-k) &= a\sqrt{(x-h)^2+(y-k+c)^2}, \\
\text{elevamos al cuadrando,} & \\
a^4 + 2a^2c(y-k) + c^2(y-k)^2 &= a^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 + 2a^2c(y-k) + a^2c^2, \\
\text{sustituyendo } c^2 = a^2-b^2, & \\
-b^2(y-k)^2 &= a^2(x-h)^2 - a^2b^2 \implies \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1
\end{aligned}$$

La ecuación simplificada $\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$, se le llama *ecuación canónica* o *natural*. Contiene toda la información para determinar la longitud de los semiejes, la longitud c, focos y vértices.

Eje mayor paralelo al eje X. En este caso, si el centro es (h,k), entonces $F_1 = (h-c, k)$ y $F_2 = (h+c, k)$. Los puntos (x,y) de la elipse satisfacen

$$d((x,y),F_1) + d((x,y),F_2) = 2a,$$

es decir,

$$\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2} + \sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2} = 2a.$$

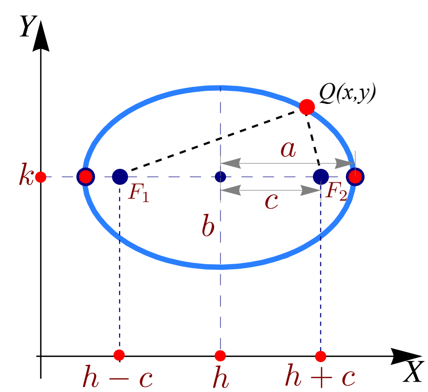
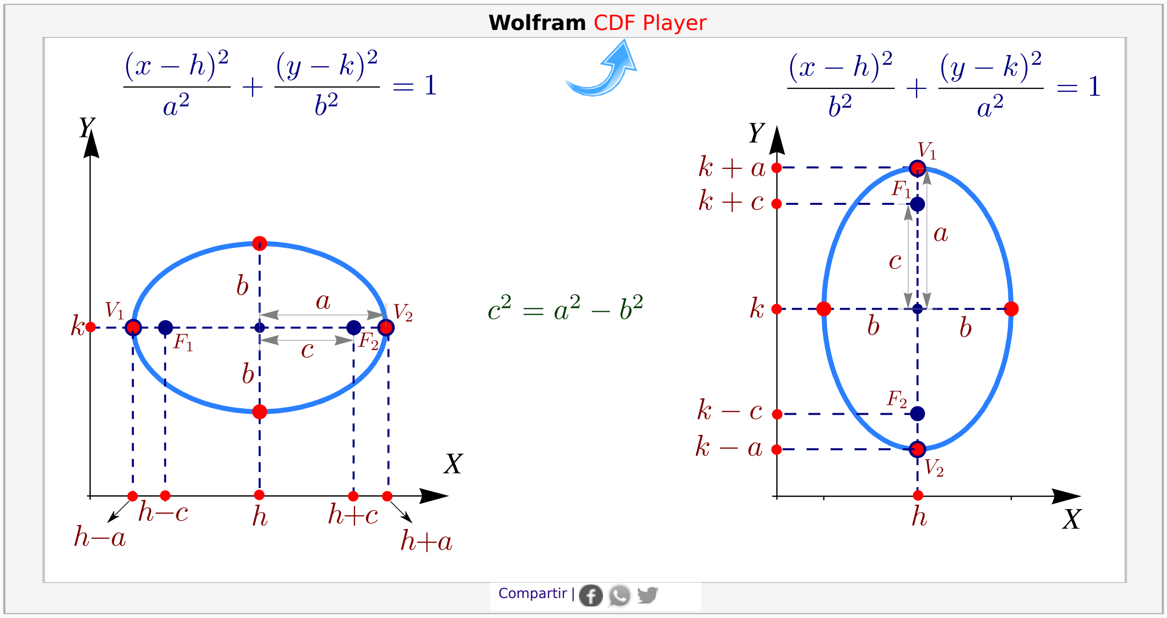


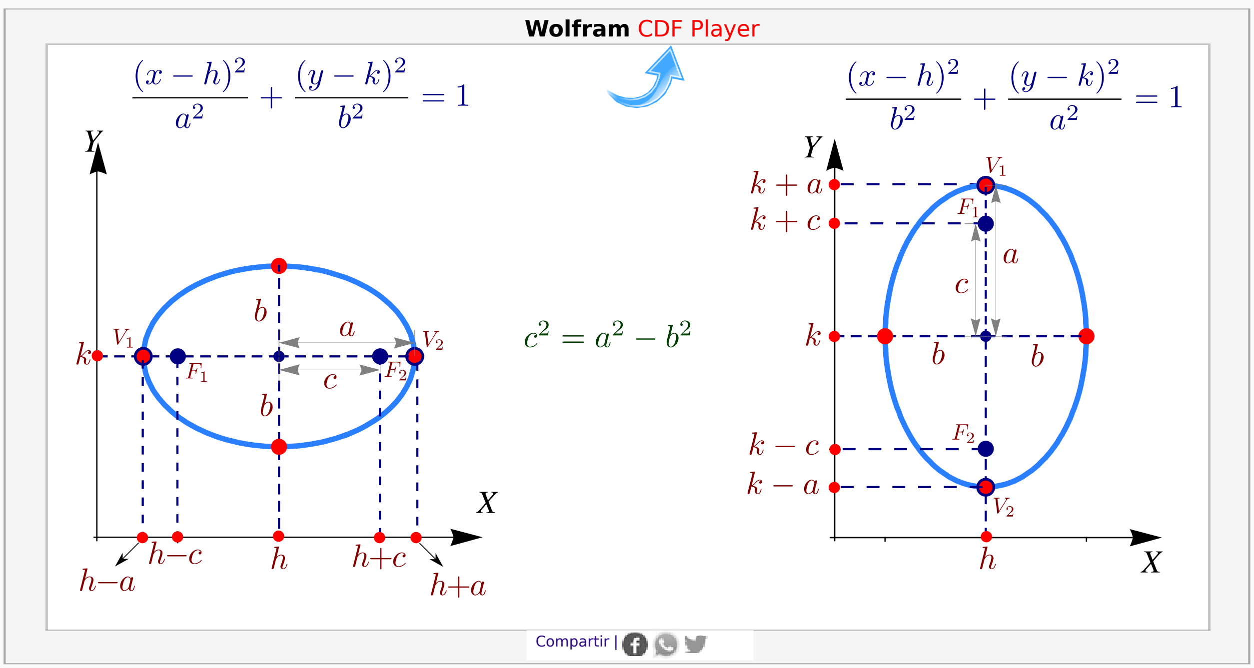
Figura 1.8: Elipse con eje mayor paralelo al eje X

Como antes, la ecuación simplificada queda $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. A esta ecuación se le llama *ecuación canónica* o *natural*. Contiene toda la información para determinar la longitud de los semiejes, la longitud c, focos y vértices. En resumen,

Elipse sin rotación. “ a ” es la longitud del semieje mayor



Elipse sin rotación. “a” es la longitud del semieje mayor



Circunferencia de radio a. Formalmente, la curva que delimita un círculo se llama *circunferencia*. Por abuso del lenguaje se habla de un “círculo de radio a”. La circunferencia es un caso especial de elipse en la que los focos son iguales y coinciden con el centro de la circunferencia. En este caso, $a^2=b^2=a^2$. Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia de un círculo con centro en $O=(h,k)$ y radio a, es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \text{ o también } (x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

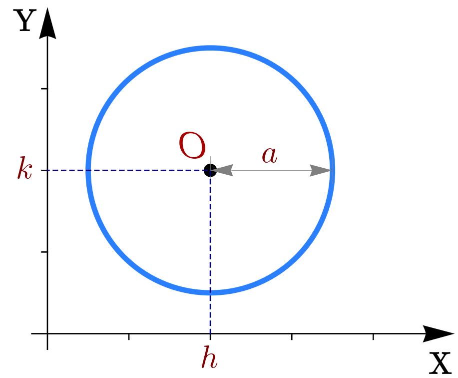
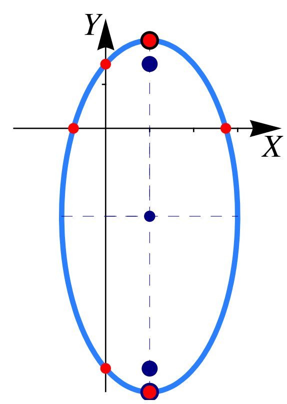


Figura 1.9: Circunferencia de radio a centrada en (h,k)

Ejemplo 1.6

Hallar la ecuación canónica de la elipse $4x^2+y^2-8x+4y-8=0$. Realizar su gráfica identificando los vértices, los focos y el centro.

Solución: Para hallar la ecuación canónica debemos completar el cuadrado de la expresión en ambas variables x e y.



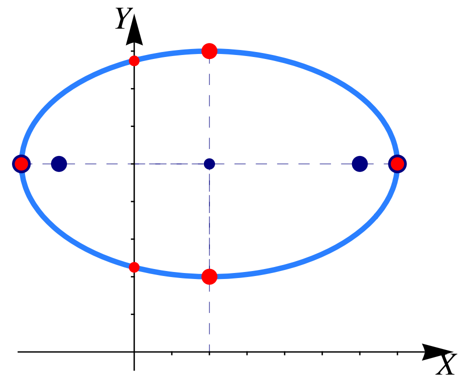
$$\begin{aligned} 4x^2+y^2-8x+4y-8 &= 0 \\ 4x^2-8x+y^2+4y-8 &= 0 \\ 4(x-1)^2+(y+2)^2 &= 16 \\ \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

- El centro es $(h,k)=(1,-2)$. La elipse tiene eje mayor paralelo al eje Y.
- Como $a^2=16$ y $b^2=4$, entonces $a=4$ y $b=2$.
- Ahora, $c^2=16-4 \implies c=\sqrt{12}$. Los focos son $(1,-2\pm\sqrt{12})$ y los vértices son $(1,-6)$, $(1,2)$.
- Las intersecciones con los ejes son $y\approx-5.46$, $y\approx1.46$, $x\approx-0.73$ y $x\approx2.73$.

Ejemplo 1.7

Determine la ecuación canónica y las características más importantes de la elipse cuyo eje mayor tiene extremos $(-3,5)$ y $(7,5)$ y cuyo eje menor tiene extremos $(2,2)$ y $(2,8)$.

Solución: El centro es el punto medio entre $(-3,5)$ y $(7,5)$, es decir, $(2,5)$. El semieje mayor mide $a = 5$ y el semieje menor mide $b = 3$.



- Como el eje mayor es paralelo al eje X, la ecuación canónica es,

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{9} = 1.$$

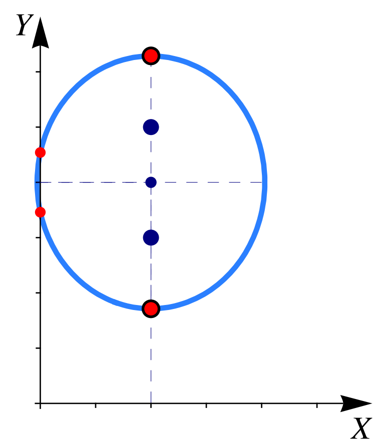
- Como $c^2 = 25 - 9$, entonces $c = 4$ y los focos son $(2 \pm 4, 5)$. Los vértices son $(2 \pm 5, 5)$. Las intersecciones con el eje Y son $y \approx 2.25$ y $y \approx 7.75$.

Ejemplo 1.8

Determine la ecuación canónica de la elipse con focos en $(2,5)$ y $(2,3)$ y que contiene al punto $(3,6)$. Realizar la gráfica.

Solución: Por la posición de los focos, el eje mayor es paralelo al eje Y. Además también deducimos que el centro es $(h,k) = (2,4)$ y que $c = 1$. Como $c^2 = a^2 - b^2$, tenemos $b^2 = a^2 - 1$. Hasta ahora tenemos que la ecuación canónica es

$$\frac{(x-2)^2}{b^2} + \frac{(y-4)^2}{a^2} = 1$$



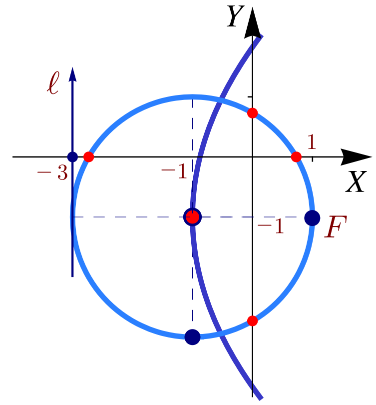
Como $b^2 = a^2 - 1$ y como la elipse contiene al punto $(3,6)$, este punto satisface esta ecuación, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{(3-2)^2}{b^2} + \frac{(6-4)^2}{a^2} &= 1, \\ \frac{1}{a^2-1} + \frac{4}{a^2} &= 1 \implies a^2 = 3 \pm \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Como $b^2 = a^2 - 1 > 0$, la única solución es $\frac{(x-2)^2}{2+\sqrt{5}} + \frac{(y-4)^2}{3+\sqrt{5}} = 1$. Las intersecciones con el eje Y son $y \approx 3.46$, $y \approx 4.54$.

Ejemplo 1.9

Determine la ecuación de la circunferencia de radio 2 con centro en el vértice de la parábola de foco $(1,-1)$ y directriz $x=-3$. Realizar la gráfica.



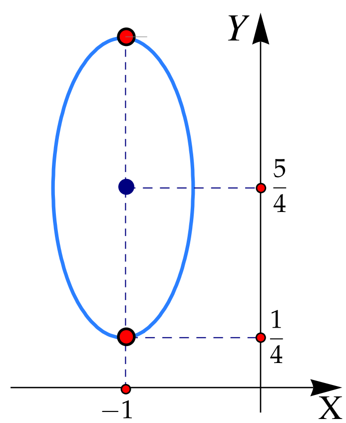
Solución: Como el vértice de una parábola está a la mitad del camino entre el foco y la directriz entonces $(h,k)=(-1,-1)$. La ecuación de la circunferencia es

$$(x+1)^2+(y+1)^2=4.$$

Las intersecciones con el eje X son $x\approx -2.73$ y $x\approx 0.73$. Las intersecciones con el eje Y son $y\approx -2.73$ y $y\approx 0.73$.

1.5 Ejercicios

Ⓡ **1.5.1** Considere la elipse a la derecha. Si se sabe que el punto $(-1/2,\ 5/4)$ está en la elipse, determine su ecuación canónica, sus focos y sus vértices.



Ⓡ **1.5.2** En cada caso, obtener la ecuación canónica de la elipse.

a.) $\dfrac{(y-1)^2}{2}+\dfrac{5(x+2)^2}{3}=2$

b.) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{y^2}{4}+y+1=0$

c.) $\dfrac{x^2}{4}+x+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{y}{2}+1=0$

d.) $x^2+\dfrac{y^2}{2}-2y+1=0$

Ⓡ **1.5.3** Considere la cónica $4x^2 + y^2 - 16x - 6y + 21 = 0$. Realizar su gráfica identificando los vértices, los focos, el centro y la intersección con los ejes.

Ⓡ **1.5.4** Determine la ecuación de la elipse cuyo centro está en el origen, contiene al punto $(-1,3)$ y uno de sus vértices es $(0,5)$. Realizar la gráfica.

Ⓡ **1.5.5** Determine la ecuación canónica de la elipse con vértices en $(3,1)$, $(3,9)$ y eje menor de longitud 6. Realizar la gráfica.

Ⓡ **1.5.6** Determinar la ecuación canónica de la elipse si se sabe que es tangente a los ejes en el primer cuadrante y uno de sus vértices es $(8,2)$.

Ⓡ **1.5.7** Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse con centro en $(0,0)$, eje mayor horizontal y los puntos $(3,1)$ y $(4,0)$ están en la elipse.

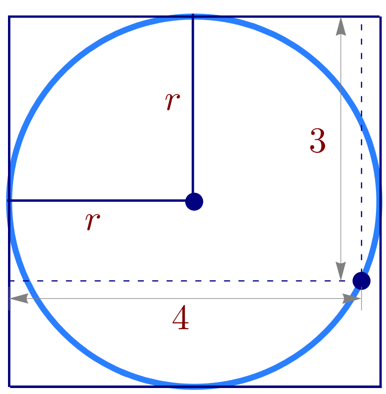
Ⓡ **1.5.8** Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse con centro en $(2,1)$, longitud del eje menor $2\,\text{ul}$ y eje mayor vertical y de longitud $6\,\text{ul}$.

Ⓡ **1.5.9** Hallar la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse que tiene un vértice y un foco en común con la parábola $y^2 + 4x = 32$ y que tiene su otro foco en el origen.

Ⓡ **1.5.10** Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse cuya suma de distancias a los puntos $(\pm 3, 0)$ es 16.

Ⓡ **1.5.11** Considere la cónica de ecuación $9y^2 + 16x^2 + 54y - 64x + 1 = 0$. Verifique que se trata de una elipse e indique sus características principales.

Ⓡ **1.5.12** Se tiene un círculo inscrito en un cuadrado tal y como se muestra en la figura que sigue. Determinar el radio.



Ⓡ **1.5.13** Considere la cónica **C** de ecuación $x^2 - 4x + 8y + 12 = 0$. Determine la ecuación canónica y las características más importantes, de la elipse que cumple simúltaneamente con las siguientes condiciones, a.) Su centro coincide en el vértice de la cónica **C**

b.) La distancia entre sus focos es 4 y están en la recta $x = 2$

c.) La distancia de un foco al vértice más cercano es 3

Ⓡ **1.5.14** Determine la ecuación canónica de la elipse que satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

a.) El vértice V_1 de la elipse coincide con el foco de la parábola de ecuación $(x-2)^2 = -4y + 24$.

b.) El vértice V_2 de la elipse coincide con el centro de la hipérbola de ecuación $x^2 - 4x - y^2 + 2y = -2$.

c.) La elipse contiene el punto $(1, 2)$.

Ⓡ **1.5.15** En la definición de la elipse como un lugar geométrico se indica que $2a > d(F_1, F_2)$. ¿Qué pasa si $2a \leqslant d(F_1, F_2)$?

1.6 Solución de los ejercicios

1.3.1 R

a.) $2x^2 - 4x + 1 = y \implies 2(x-1)^2 = y + 1 \implies (x-1)^2 = \frac{1}{2}(y+1).$

b.) $y^2 = -\frac{8}{9}(x + \frac{3}{8})$

c.) $(y+1)^2 = 4(x+2)$

d.) $(x+1)^2 = 2(y-2)$

e.) $x^2 = (y-2)$

1.3.2 R El vértice es $(h,k) = (1,3)$. Por la posición del foco se deduce que el eje es paralelo al eje X y la parábola abre hacia la derecha. Entonces la ecuación canónica es $(y-3)^2 = 4p(x-1)$. Como $p = ||(2,3)-(1,3)|| = 1$, la ecuación canónica es $(y-3)^2 = 4(x-1)$.

1.3.3 R La ecuación canónica es de la forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$. Como contiene los tres puntos, entonces

$$\left\{\begin{array}{rcl} (0-k)^2 &=& 4p(0-h) \\ (2-k)^2 &=& 4p(-1-h) \\ (-2-k)^2 &=& 4p(-2-h) \end{array}\right. \implies h = \frac{1}{24},\ p = -\frac{2}{3} \text{ y } k = \frac{1}{3}$$

Por tanto, la parábola es $\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 4 \cdot -\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{24}\right)$

1.3.4 R Como $(h,k) = (-1,1)$ y $p = 1$, entonces $(x+1)^2 = 4(y-1)$.

1.3.5 R La ecuación es $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ y abre a la izquierda. El vértice es $(h,k) = (5,4)$ y $p = -2$. Entonces la ecuación canónica es $(y-4)^2 = -8(x-5)$.

1.3.6 R $(x-2)^2 = 2(y-3)$.

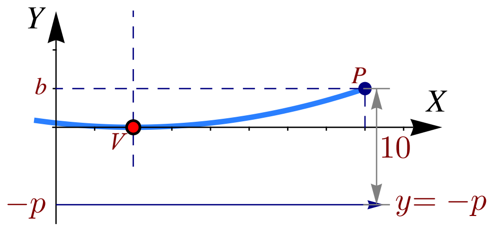
1.3.7 R De acuerdo a **d.)** la parábola abre hacia arriba o hacia abajo. Por la posición del vértice y el punto $(8,b)$, solo podría abrir hacia arriba. El vértice es $(h,k) = (2,0)$ por lo que lo que la ecuación de la parábola es $(x-2)^2 = 4p(y-0)$; $p > 0$.

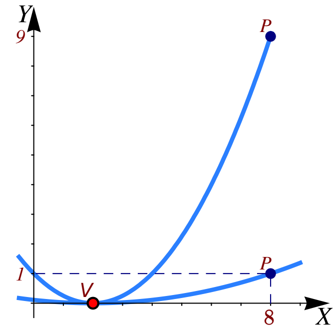
La directriz es $y = k - p = -p$. Para determinar p y b tenemos dos datos

- La distancia de $(8,b)$ a la directriz es 10, es decir $b + p = 10$
- El punto $(8,b)$ está en la parábola, es decir, $(8-2)^2 = 4p(b)$

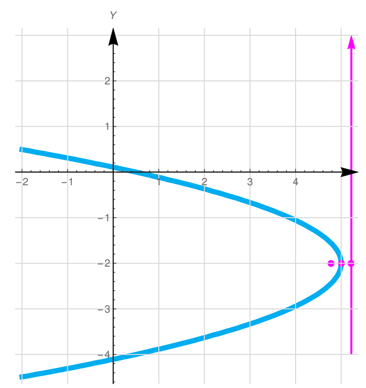
$$\begin{array}{rcl} b &=& 10 - p \\ 36 &=& 4pb \implies 36 = 4p(10-p) \implies 36 - 40p + 4p^2 = 0 \end{array}$$

Con lo que $p = 1$ o $p = 9$. Por lo tanto, las parábolas que cumplen estas condiciones son $(x-2)^2 = 4y$ (cuando $b = 1$) o $(x-2)^2 = 36y$ (cuando $b = 9$). Ambas parábolas se muestran en la figura que sigue.





1.3.8 $$(y+2)^2 = 4 \cdot -\frac{2}{9}(x-5)$$



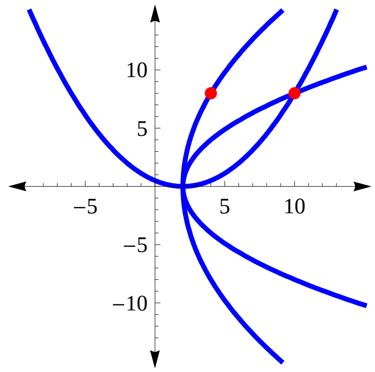
1.3.9 El vértice es $(h, k) = (2, 0)$. Como $b > 2$, la parábola solo podría abrir hacia arriba o hacia la derecha.

- Si abre hacia arriba, la ecuación canónica es $(x-2)^2 = 4py$. En este caso, como $8+p = 10 \implies p = 2$ y entonces $b = 10$. En este caso tenemos la pará]bola $(x-2)^2 = 8y$.

- Si abre hacia la derecha, la ecuación canónica es $y^2 = 4p(x-2)$. En este caso, como la directriz tiene ecuación $x = 2 - p$, tenemos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b-(2-p) & = & 10 \\ 64 & = & 4p(b-2) \end{array} \right. \implies p = 8;\;\; b = 4 \text{ o } p = 2;\;\; b = 10.$$

Las tres parábolas son $(x-2)^2 = 8y$; $y^2 = 32(x-2)$ y $y^2 = 8(x-2)$.



1.3.10 R Si el foco está en la directriz tendríamos una recta (una cónica degenerada).

1.3.11 R Completando cuadrados obtenemos

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c-y &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c-y \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}-y \;=\; a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}-y \;\text{ si }\; \Delta=b^2-4ac. \end{aligned}$$

Entonces, $ax^2+bx+c-y=0 \implies \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{1}{a}\left(y+\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ y el vértice es $\left(-\dfrac{b}{2a},\,-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

1.3.12 R Se trata de una parábola con foco en $(2,3)$ y directriz con ecuación $x=4$. Por lo tanto, la parábola tiene vértice en $(3,3)$ y abre hacia la izquierda. Su ecuación es $(y-3)^2=-4(x-3)$.

1.5.1 R $\dfrac{(x+1)^2}{1/4}+\dfrac{(y-5/4)^2}{1}=1.$

1.5.2 R

a.) $\dfrac{(y-1)^2}{4}+\dfrac{(x+2)^2}{\frac{6}{5}}=1$

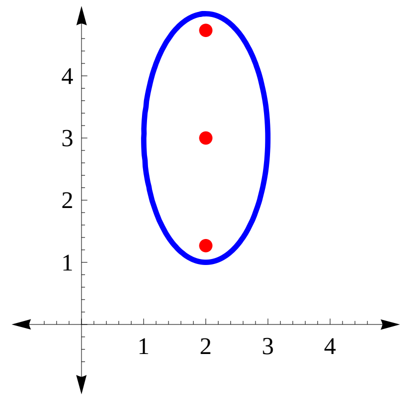
b.) $\dfrac{(x+4)^2}{16}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$

c.) $\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y+4)^2}{16}=1$

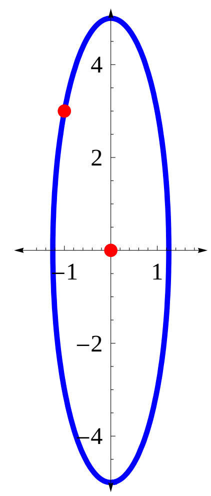
d.) $x^2+\dfrac{(y-2)^2}{2}=1$

1.5.3 R La ecuación canónica la obtenemos completando cuadrados.

- Ecuación canónica: $\dfrac{(y-3)^2}{4}+\dfrac{(x-2)^2}{1}=1.$
- Centro: $(h,k)=(2,3)$
- $a^2=4,\ b^2=1$ y $c=\sqrt{3}$
- Focos: $(2,\ 3\pm\sqrt{3})$
- No hay intersección con ejes.



1.5.4 Los datos los podemos representar en la figura de la derecha.



Como el centro es $(h,k)=(0,0)$, entonces la ecuación es

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Esto es así pues el vértice $(0,5)$ nos indica que el eje mayor está (en este caso) sobre el eje Y.

Ahora, como $(0,5)$ es un vértice y el centro está en $(0,0)$, se sigue que $a=5$ y

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{25}=1$$

Por otra parte, como $(-1,3)$ está en la elipse

$$\frac{(-1)^2}{b^2}+\frac{3^2}{25}=1$$

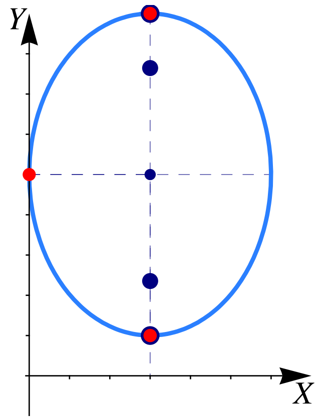
de aquí, despejando, obtenemos $b^2=\dfrac{25}{16}$. Finalmente, la ecuación canónica de la elipse es

$$\frac{x^2}{\frac{25}{16}}+\frac{y^2}{25}=1$$

1.5.5 El eje mayor de la elipse es paralelo al eje Y. Como la longitud del eje menor es de 6 unidades, entonces $b=3$. Como los vértices están en $(3,1)$ y $(3,9)$, entonces el centro es $(h,k)=(3,5)$ y por tanto $a=4$. La ecuación canónica es

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$$

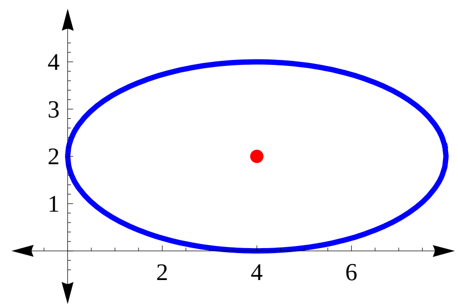
La gráfica de la elipse se muestra en la figura de la derecha. Solo hay una intersección con el eje Y en $y = 5$.



1.5.6 La elipse se puede ver en la figura de la derecha.

Como la elipse es tangente a los ejes en el primer cuadrante, el otro vértice debe ser $(0,2)$ (su eje mayor no puede ser paralelo al eje Y pues su semieje menor sería de 8 unidades y el mayor de 1 unidad!). Luego, $(h,k) = (4,2)$, $a = 4$ y $b = 2$. La ecuación canónica es

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$

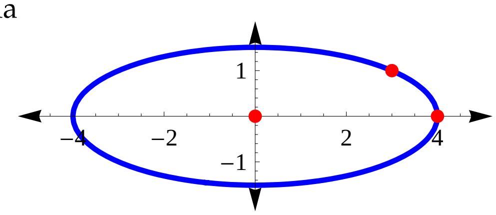


1.5.7 La elipse se puede ver en la figura de la derecha.

Según los datos, $(h,k) = (0,0)$ y $(4,0)$ es el vértice de la derecha, entonces $a = 4$ y $(3,1)$ satisface la ecuación de la elipse:

$\dfrac{3^2}{16} + \dfrac{1^2}{b^2} = 1 \implies b^2 = \dfrac{16}{7}$. La ecuación canónica es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{7}} = 1.$$

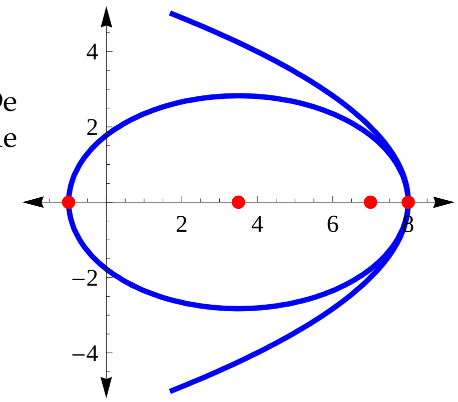


- Centro: $(h,k) = (0,0)$,
- $c = \sqrt{\dfrac{96}{7}}$,
- focos: $(0 \pm \sqrt{\dfrac{96}{7}}, 0)$,
- vértices: $(4,0)$ y $(-4,0)$.

1.5.8 $(x-2)^2 + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1.$

- Centro: $(h, k) = (2, 1)$,
- $c = \sqrt{8}$,
- focos: $(2, 1 \pm \sqrt{8})$
- vértices: $(2, 1 \pm 3)$.

1.5.9 La elipse se puede ver en la figura de la derecha.



La ecuación canónica de la parábola es $y^2 = -4(x - 8)$. De esta ecuación se obtiene el otro foco y un vértice derecho de la elipse. La ecuación canónica es

$$\frac{(x - 3.5)^2}{4.5^2} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

- Centro: $(h, k) = (3.5, 0)$,
- $c = 3.5$,
- focos: $(0, 0)$ y $(7, 0)$,
- vértices: $(-1, 0)$ y $(8, 0)$.

1.5.10 La ecuación canónica es $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{55} = 1$.

- Centro: $(h, k) = (0, 0)$,
- $c = 3$,
- focos: $(\pm 3, 0)$,
- vértices: $(\pm 8, 0)$.

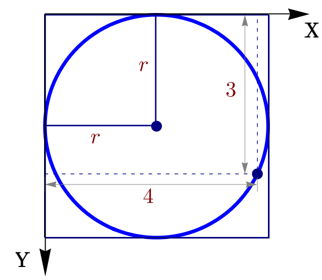
1.5.11 La ecuación canónica es $\dfrac{(x - 2)^2}{9} + \dfrac{(y + 3)^2}{16} = 1$. Por lo tanto es una elipse.

- Centro: $(h, k) = (2, -3)$,
- $c = \sqrt{7}$,
- focos: $(2, -3 \pm \sqrt{7})$,
- vértices: $(2, -3 \pm 4)$.

1.5.12 Si consideramos los lados del cuadrado como ejes coordenados, el círculo inscrito es un círculo con centro en (r, r) y $(x, y) = (3, 4)$ es un punto en la circunferencia.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(x-h)^2+(y-k)^2 &= r^2,\\ (3-r)^2+(4-r)^2 &= r^2,\\ r &= 7-2\sqrt{6}\approx 2.1\\ r &= 7+2\sqrt{6}\approx 11.8\end{aligned}$$



Como $r<4$ entonces $r=7-2\sqrt{6}$.

1.5.13

a.) **C** es una parábola de ecuación canónica

$$(x-2)^2=-8(y+1).$$

b.) Centro de la elipse $(2,-1)$

c.) $d(F_1,F_2)=4 \implies 2c=4 \implies c=2$

d.) $d(F_1,V_1)=3 \implies a-c=3 \implies a=5$

e.) $b^2=21$

f.) Ecuación canónica de la elipse:

$$\frac{(x-2)^2}{21}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$$

g.) Vértices $(2,4)$, $(2,-6)$.

h.) Focos $(2,1)$, $(2,-3)$.

1.5.14

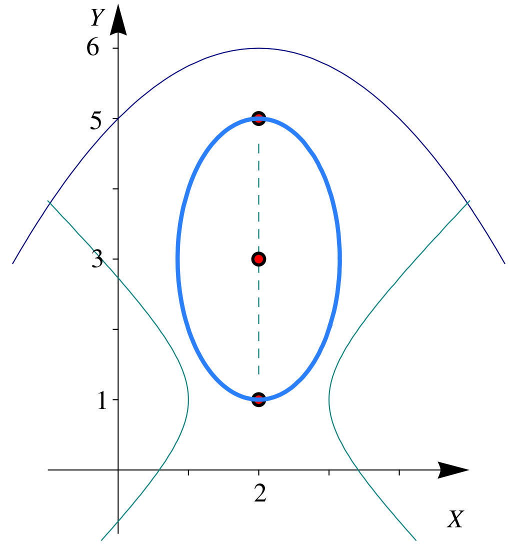
De la información que nos dan deducimos:

- El foco de la parábola $(x-2)^2=-4(y-6)$ es $V_1=(2,\ 6-1)=(2,5)$ pues $p=-1$.
- El centro de la hipérbola $(x-2)^2-(y-1)^2=1$ es $V_2=(2,1)$.
- Los vértices nos indican que la elipse tiene centro en $(h,k)=(2,3)$ y su ecuación canónica es

$$\frac{(x-2)^2}{b^2}+\frac{(y-3)^2}{2^2}=1.$$

- Como la elipse contiene el punto $(1,2)$,

$$\frac{(1-2)^2}{b^2}+\frac{(2-3)^2}{2^2}=1 \implies b^2=\frac{4}{3}.$$



La ecuación canónica de la elipse es $\dfrac{(x-2)^2}{\frac{4}{3}} + \dfrac{(y-3)^2}{2^2} = 1.$

1.5.15 R

Citar como:

Walter Mora F. *Cálculo en Varias Variables. Visualización interactiva.* (2019) 2da ed. [ebook] Cartago, Costa Rica. Revista digital, Matemática, Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/.

Revisado: Julio, 2022

Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF: https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

http://www.matematicainteractivacr.com/