

Semana 14: Integral de Línea - III

Campos conservativos. Teorema fundamental. Teorema de Green

Revista de Matemática/Libros

W. Mora. "Cálculo en Varias Variables."



Las aplicaciones interactivas requieren haber instalado la aplicación gratuita Wolfram CDFPlayer
<https://www.wolfram.com/cdf-player/>



Contenido

13.1 Campos conservativos. Teorema fundamental.	1
13.2 Ejercicios	5
13.3 Teorema de Green (en el plano).	8
13.4 Ejercicios	10
13.5 Área como una integral de línea.	12
13.6 Solución de los ejercicios	13
Licencia Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0	16

13.1 Campos conservativos. Teorema fundamental.

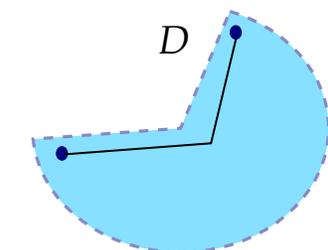
Una condición para que la integral de línea no dependa de la trayectoria que une a A con B es que exista φ tal que $F = \nabla\varphi$ con $\varphi \in C^1$. En este caso podemos calcular la integral de línea usando cualquier camino que una A con B o también, usando el Teorema Fundamental para la integral de línea.

Definición 13.1

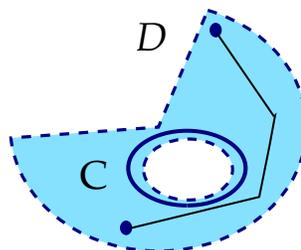
Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice *conexo* si todo par de puntos de D se pueden unir con una curva regular a trozos contenida en D . Es decir, D es de "una sola pieza".

Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo se dice *simplemente conexo* si toda curva cerrada simple C en D , encierra una región que está también en D . Es decir, los conjuntos simplemente conexos no tienen "agujeros".

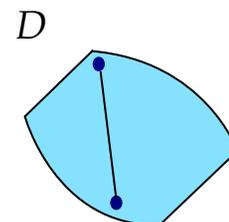
Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice *convexo* si para todo par de puntos $A, B \in D$, el segmento de recta que une A con B está contenido en D , es decir, $\{A + t(B - A) : t \in [0, 1]\} \subset D$.



D es simplemente conexo, pero no convexo



D es conexo pero no simplemente conexo



D es convexo

Definición 13.2

Sea F un campo vectorial definido sobre un conjunto abierto U . Si φ es una función diferenciable sobre U tal que $F = \nabla\varphi$, decimos que φ es una **función potencial** de F . También decimos que F es **conservativo**.

Si U es conexo y F conservativo, las funciones potenciales de F son iguales salvo constantes. También se puede mostrar que si $F = (P, Q)$ y si $P_y \neq Q_x$, entonces F no es conservativo (no tiene función potencial). La condición $P_y = Q_x$ es *solo necesaria* para que F sea conservativo. La condición es *necesaria y suficiente* si U es **simplemente conexo**¹.

Teorema 13.1 (Test de derivadas mixtas).

Sea $F = P \hat{i} + Q \hat{j}$ es de clase C^1 en un conjunto **simplemente conexo** D del plano. Decimos que F es *conservativo* sii

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Sea $F = P \hat{i} + Q \hat{j} + R \hat{k}$ es de clase C^1 en un conjunto **simplemente conexo** D del espacio. Decimos que F es *conservativo* sii

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Teorema 13.2 (Teorema Fundamental para integrales de línea).

Sea $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 donde D es conexo y abierto. Sea C una curva regular a trozos en D parametrizada por \mathbf{r} y sean $A = \mathbf{r}(a)$ y $B = \mathbf{r}(b)$; se tiene

$$\int_C \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Teorema 13.3 (Campos conservativos).

Sea D **simplemente conexo**. Sea C una curva orientada y simple contenida en D y parametrizada por \mathbf{r} . Suponemos que C inicia en A y termina en B . Sea F un campo definido en D .

- F es conservativo \iff existe φ de clase C^1 tal que $F = \nabla\varphi$, sobre D .
- Si F es conservativo, existe φ de clase C^1 tal que $\int_C F \cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$

¹Un conjunto D es *simplemente conexo* si cualquier curva cerrada contenida en D tiene todo su interior contenido en D , es decir, si está formado por una sola pieza y no contiene "agujeros" (un punto cuenta como un agujero).

- **(Independencia del camino)** Si F es conservativo, $\int_C F \cdot dr = \int_{C'} F \cdot dr$ donde C' es cualquier curva, contenida en D , regular a trozos y que va de A a B .
- F es conservativo $\iff \int_C F \cdot dr = 0$ para *cualquier* curva cerrada simple C contenida en D .

Observe que si $\int_C F \cdot dr = 0$ para *alguna* curva cerrada simple C , esto no significa que F sea conservativo. En la parte 3. del ejemplo ?? tenemos un campo con integral nula sobre una elipse pero que no es conservativo.

Ejemplo 13.1

Sea $F(x, y, z) = (2x \ln(yz) - 5ye^x) \hat{i} + \left(\frac{x^2}{y} - 5e^x\right) \hat{j} + \left(\frac{x^2}{z} + 2z\right) \hat{k}$ y sea C una curva simple que une $A = (2, 2, 1)$ con $B = (3, 1, e)$. Calcule $\int_C F \cdot dr$.

Solución: F es de clase C^1 en la región $D = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$. Esta región es simplemente conexa.

El campo es conservativo en esta región pues,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -5e^x + 2x/y = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 2x/z = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Luego, podemos calcular la integral de línea usando un camino C' en D que una A con B o también podemos calcular una función potencial φ y usar el teorema fundamental para integrales de línea.

En este caso vamos a calcular la integral usando una función potencial φ . Como $\nabla\varphi = F$ entonces $\varphi_x = P$, $\varphi_y = Q$, y $\varphi_z = R$.

$$\varphi_x = 2x \ln(yz) - 5ye^x \implies \varphi(x, y, z) = \int 2x \ln(yz) - 5ye^x dx = x^2 \ln(yz) - 5ye^x + K_1(y, z).$$

$$\varphi_y = \frac{x^2}{y} - 5e^x \implies \varphi(x, y, z) = \int \frac{x^2}{y} - 5e^x dy = x^2 \ln y - 5ye^x + K_2(x, z).$$

$$\varphi_z = \frac{x^2}{z} + 2z \implies \varphi(x, y, z) = \int \frac{x^2}{z} + 2z dz = x^2 \ln z + z^2 + K_3(x, y).$$

Observemos que $x^2 \ln y + x^2 \ln z = x^2 \ln(yz)$. Recolectando primitivas podemos adivinar que

$$\varphi(x, y, z) = x^2 \ln(yz) - 5ye^x + z^2 + K$$

lo cual podemos aceptar *después de verificar* que $\varphi_x = P$, $\varphi_y = Q$, y $\varphi_z = R$. Finalmente,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A) = -5e^3 + 11e^2 + 8 - 4 \log(2) \approx -13.9207.$$

Ejemplo 13.2

Considere el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xe^z \hat{\mathbf{i}} + \cos(y) \hat{\mathbf{j}} + 2x^2e^z \hat{\mathbf{k}}$. Sea C la curva de la figura. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Solución: \mathbf{F} es de clase C^1 sobre $D = \mathbb{R}^3$ que es simplemente conexa. Dichosamente no tenemos que integrar sobre la curva C pues \mathbf{F} es conservativo. En efecto

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 4xe^z = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial y}$$

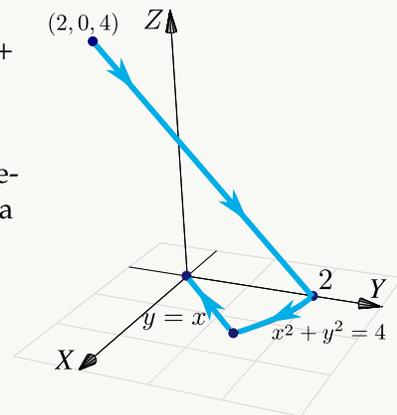


Figura 13.1: Curva C .

En este ejemplo vamos a calcular la integral de dos maneras distintas: usando una función potencial y también usando un camino C' .

Primer Manera: Con un camino C' que inicia en $(2, 0, 4)$ y termina en $(0, 0, 0)$. El camino que hemos escogido se ve en la figura.

$$\begin{cases} -C_1 & : \quad \mathbf{r}_1(t) = (t, 0, 4) \text{ con } t \in [0, 2] \\ -C_2 & : \quad \mathbf{r}_2(t) = (0, 0, t) \text{ con } t \in [0, 4] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= -\int_0^2 \mathbf{F}(t, 0, 4) \cdot \mathbf{r}'_1(t) dt - \int_0^4 \mathbf{F}(0, 0, t) \cdot \mathbf{r}'_2(t) dt \\ &= -\int_0^2 (4e^{4t}, 1, 2e^{4t^2}) \cdot (1, 0, 0) dt - \int_0^4 (0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) dt \\ &= -\int_0^2 4te^4 dt = -8e^4. \end{aligned}$$

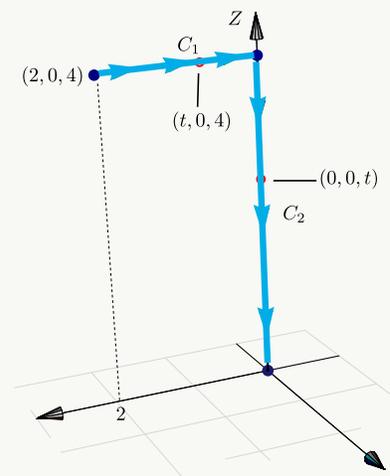


Figura 13.2: Curva $C' = C_1 \cup C_2$.

Segunda Manera: Con una función potencial.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_x = 4xe^z \implies \varphi(x, y, z) = \int 4xe^z dx = 2x^2e^z + K_1(y, z), \\ \varphi_y = \cos(y) \implies \varphi(x, y, z) = \int \cos y dy = \text{sen } y + K_2(x, z), \implies \varphi(x, y, z) = 2x^2e^z + \text{sen } y + C \\ \varphi_z = 2x^2e^z \implies \varphi(x, y, z) = \int 2x^2e^z dz = 2x^2e^z + K_3(x, y). \end{array} \right.$$

Finalmente, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(0, 0, 0) - \varphi(2, 0, 4) = -8e^4$.

(N) La condición “*simplemente conexo*” para que F sea conservativo. Sea $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ definido en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Se verifica que $P_y = Q_x$ pero

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \text{ si } C \text{ es la circunferencia } x^2 + y^2 = 1,$$

lo cual indica que F no tiene función potencial.

Lo mismo pasa si consideramos $F(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$ para $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$

El problema en principio es que se requiere que F esté definido en una región **simplemente conexa**, pero la explicación detallada de este fenómeno con el campo F es una cuestión topológica que tiene que ver con homotopías. Un artículo sencillo de leer sobre esto, lo puede encontrar en V. Pati, “How Topology Governs Analysis” <http://www.isibang.ac.in/~statmath/stinc/database/notes/puncturedplane.pdf>

13.2 Ejercicios

(R) **13.2.1** Sea F un campo de fuerzas tal que $F(x, y, z) = (2xy + z^3) \hat{\mathbf{i}} + x^2 \hat{\mathbf{j}} + 3xz^2 \hat{\mathbf{k}}$.

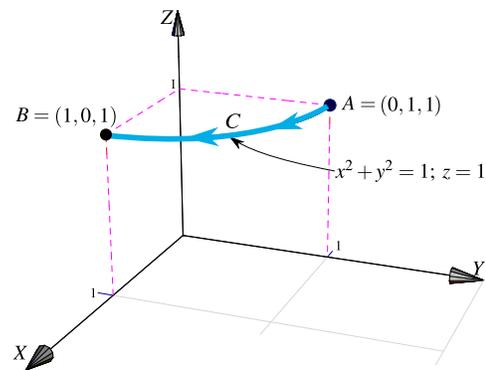
- Demostrar que F es un campo de fuerzas conservativo.
- Hallar una función potencial de F .
- Determinar el trabajo realizado para desplazar un cuerpo en este campo desde la posición $(1, 1, 1)$ hasta $(1, 1, 2)$.

R 13.2.2 Sea F un campo de fuerzas tal que $F(x, y, z) = (yz - y^2 + 2xz) \hat{i} + (xz - 2xy) \hat{j} + (xy + x^2) \hat{k}$.

- Demstrar que F es un campo de fuerzas conservativo.
- Hallar una función potencial de F .
- Determinar el trabajo realizado para desplazar un cuerpo en este campo desde la posición $(0, 1, 0)$ hasta $(-1, -1, 0)$.

R 13.2.3 Sea $F(x, y, z) = (2x + 5) \hat{i} + (3y^2) \hat{j} + \frac{1}{z} \hat{k}$ y C la trayectoria que va de $A = (0, 1, 1)$ hasta $B = (1, 0, 1)$ de acuerdo a la figura de la derecha.

- Verifique que el campo vectorial F es conservativo.
- Calcule la integral de línea $\int_C F \cdot dr$ utilizando una función potencial.
- Calcule la integral de línea $\int_C F \cdot dr$, *sin usar* una función potencial.

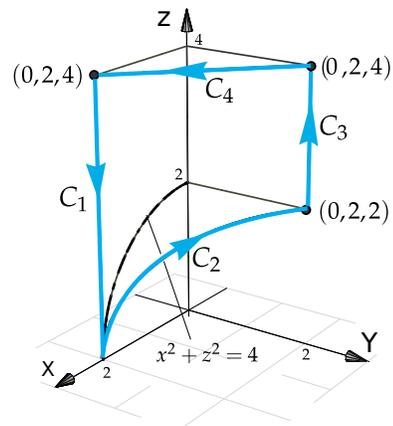


R 13.2.4 Sea F definido por

$$F(x, y, z) = x \hat{i} - y \hat{j} + z \hat{k}$$

y $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ la curva que se muestra en la figura de la derecha.

- Verifique que el campo vectorial F es conservativo.
- Calcule la integral de línea $\int_C F \cdot dr$ utilizando una función potencial.
- Calcule la integral de línea $\int_C F \cdot dr$ sin usar una función potencial.

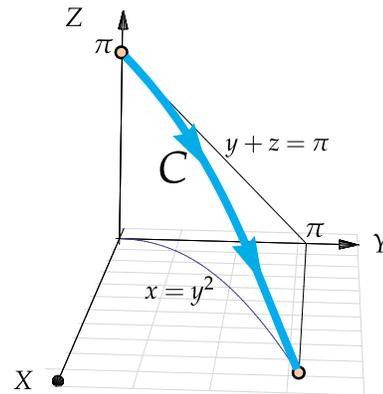


R 13.2.5 Sea F un campo de fuerzas tal que

$$F(x, y, z) = \left(y \cos(xy) + \frac{1}{x+1}, x \cos(xy), \frac{1}{z+1} \right).$$

a.) Demostrar que F es un campo de fuerzas conservativo.

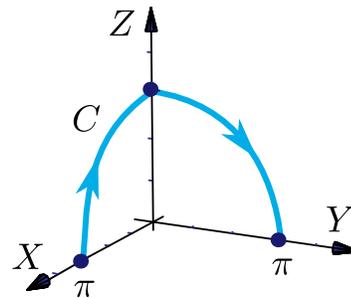
b.) Calcule la integral de línea $\int_C F \cdot dr$



R 13.2.6 Considere el campo vectorial $F(x, y, z) = (yz^2 - \sin x \sin(\pi - y), xz^2 - \cos(\pi - y) \cos x, 2xyz)$ y sea C la curva que une los puntos $(\pi, 0, 0)$ con $(0, \pi, 0)$, como se ve en la figura

a.) Verifique que F es conservativo.

b.) Calcule $\int_C F \cdot dr$ usando una función potencial.



R 13.2.7 Sea F definido por

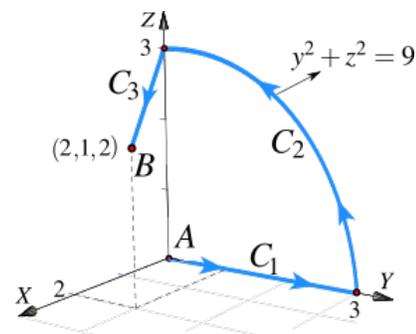
$$F(x, y, z) = (yz + y \cos(xy)) \hat{i} + (xz + x \cos(xy)) \hat{j} + xy \hat{k}$$

y C la trayectoria que va de A hasta B de acuerdo a la figura de la derecha.

a.) Verifique que el campo vectorial F es conservativo.

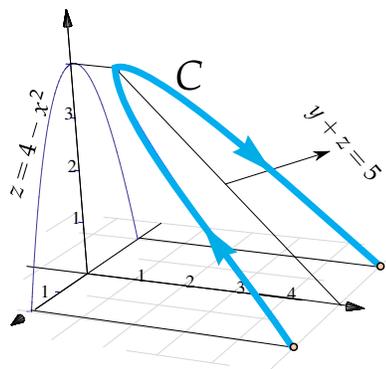
b.) Calcule la integral de línea $\int_C F \cdot dr$ utilizando una función potencial.

c.) Calcule la integral de línea $\int_C F \cdot dr$ sin usar una función potencial.



R 13.2.8 Sea F un campo de fuerzas tal que

$$F(x, y, z) = -(2x+3x^2z^2) \hat{i} - (2y+3y^2z^4) \hat{j} - (2x^3z+4y^3z^3) \hat{k}$$



a.) Demostrar que F es un campo de fuerzas conservativo.

b.) Calcule la integral de línea $\int_C F \cdot dr$

R 13.2.9 (*) Sea $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ definido en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Verifique que $P_y = Q_x$ pero sin embargo, $\int_C F \cdot dr = 2\pi$ si C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

13.3 Teorema de Green (en el plano).

El siguiente teorema, llamado “Teorema de Green en el plano”, aplica para regiones planas limitadas por curvas cerradas y simples, regulares a trozos. Una idea intuitiva, en términos de “circulación”, se puede ver en la sección ??.

Teorema 13.4 (Teorema de Green en el plano).

Sean P y Q campos escalares derivables con continuidad en un conjunto abierto S del plano XY . Sea C una curva simple cerrada regular a trozos y sea D la región encerrada por C (es decir, $C = \partial D$). Si D está contenida en S , se tiene la identidad

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

donde C es recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj.

• Intuitivamente, C es recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj si al caminar a lo largo de C la región D está siempre a la izquierda. Notar que $C = \partial D$ indica que C es la *frontera* de D .

Ejemplo 13.3

Calcular $\int_C y^2 dx + x^2 dy$ si C es la curva de la figura.

Solución:

En este caso, $P(x, y) = y^2$ y $Q(x, y) = x^2$. Como se cumplen las condiciones del teorema de Green entonces,

$$\begin{aligned} \int_C y^2 dx + x^2 dy &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{x^2} 2x - 2y dy dx \\ &= \int_0^1 2x^3 - x^4 dx = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

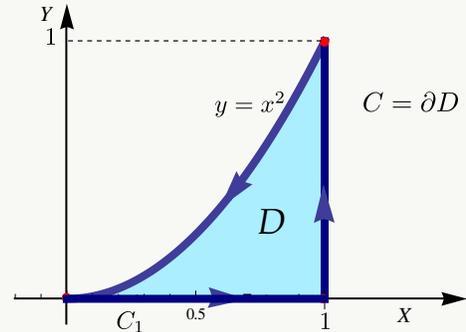


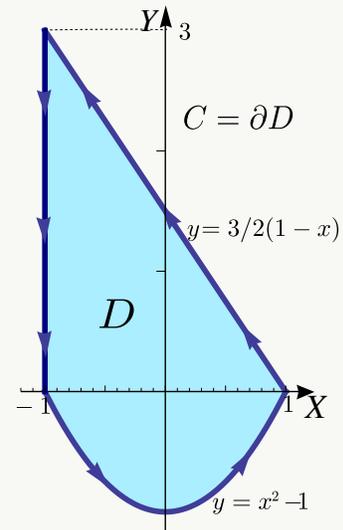
Figura 13.3: Curva $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Ejemplo 13.4

Calcular $\int_C (x + y) dx + (3x + \arctan y) dy$ si C es la curva de la figura.

Solución: En este ejemplo, $P(x, y) = x + y$ y $Q(x, y) = 3x + \arctan(y)$. Como se cumplen las condiciones del teorema de Green, entonces

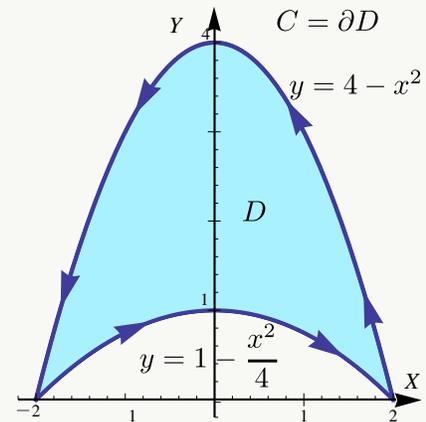
$$\begin{aligned} \int_C (x + y) dx + (3x + \arctan y) dy &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA \\ &= \int_{-1}^1 \int_{x^2-1}^{\frac{3-3x}{2}} 3 - 1 dy dx \\ &= \int_{-1}^1 5 - 3x - 2x^2 dx = \frac{26}{3} \end{aligned}$$



Ejemplo 13.5

Calcular $\int_C (x + \arcsen x) dx + (2x + \ln(y^2 - 3)) dy$ si C es la curva de la figura.

Solución: En este ejemplo, $P(x, y) = x + \arcsen x$ y $Q(x, y) = 2x + \ln(y^2 - 3)$. Como se cumplen las condiciones del teorema de Green podemos poner



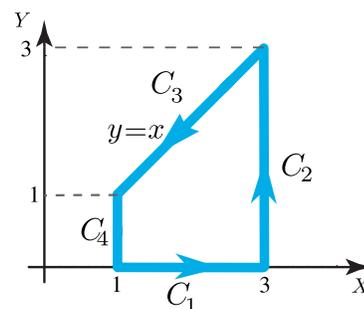
$$\begin{aligned} \int_C (x + \arcsen x) dx + (2x + \ln(y^2 - 3)) dy &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA \\ &= \int_{-2}^2 \int_{1-x^2/4}^{4-x^2} 2 dy dx \\ &= \int_{-2}^2 6 - \frac{3x^2}{2} dx = 16. \end{aligned}$$

13.4 Ejercicios

(R) 13.4.1 Sea F un campo vectorial dado por $F(x, y) = (x + y) \hat{i} - (x^2 + y^2) \hat{j}$. La curva C es la frontera del trapecio limitado por las curvas $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$ y $y = x$ como se muestra en la figura.

a.) Calcular la integral $\int_C F \cdot dr$ usando el teorema de Green.

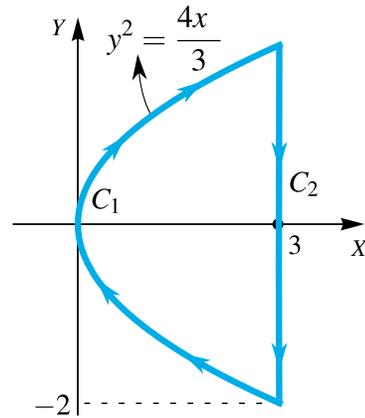
b.) Calcular la integral $\int_C F \cdot dr$ sin utilizar el teorema de Green.



R 13.4.2 Considere el campo vectorial

$$F(x, y) = x \hat{i} + (x + y^2) \hat{j}.$$

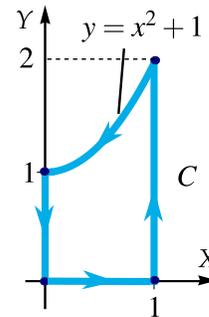
Calcular $\int_C F \cdot dr$ donde $C = C_1 + C_2$ tal y como se muestra en la figura a la derecha.



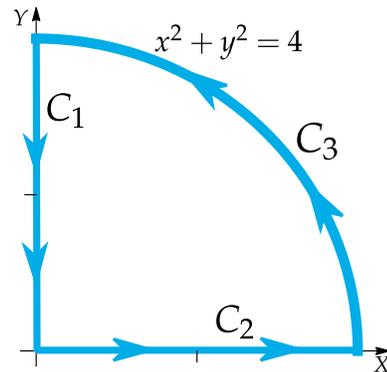
R 13.4.3 Considere el campo vectorial

$$F(x, y, z) = y \hat{i} + x^2 \hat{j}$$

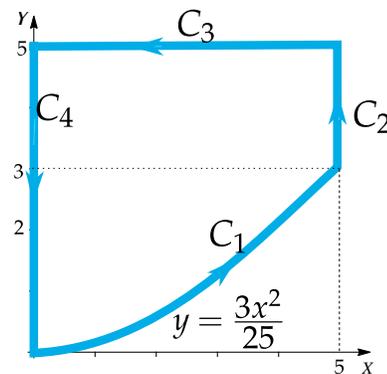
Calcule la integral de línea $\int_C F \cdot dr$ donde C es la curva que se muestra en la figura a la derecha



R 13.4.4 Calcule la integral $\int_C F \cdot dr$ donde $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, y $F(x, y) = (xy^2 + \sqrt{2 + \cos x}) \hat{i} + (yx^2 - ye^{\sin y}) \hat{j}$



R 13.4.5 Calcule $\int_C (4y + \arctan(x/5)) dx + (x^2 + \ln(y + 1)) dy$ donde C es el camino representado en la figura a la derecha.



13.5 Área como una integral de línea.

Si $P(x, y) = 0$ y $Q(x, y) = x$ entonces $Q_x - P_y = 1$, aplicando el teorema de Green (si se cumplen las condiciones) obtenemos otra manera para calcular el área de A_D siendo la frontera de la región D una curva orientada contra-reloj.

$$\oint_C 0 \, dx + x \, dy = \iint_D 1 \, dA = A_D$$

Lo cual puede ser conveniente si la integral de línea no ofrece gran dificultad.

Teorema 13.5

Si D es una región plana limitada por una curva C , cerrada simple, regular a trozos y orientada contra-reloj, entonces el área de D viene dada por

$$A_D = \oint_C x \, dy$$

Ejemplo 13.6

Calcular el área de la región encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución: Parametrizamos la elipse con $\mathbf{r}(t) = a \cos t \, \hat{\mathbf{i}} + b \sin t \, \hat{\mathbf{j}}$ con $t \in [0, 2\pi[$. Esta parametrización orienta la elipse contra-reloj. En este caso, $x = a \cos t$ mientras que $y = b \sin t$ y $dy = b \cos t \, dt$,

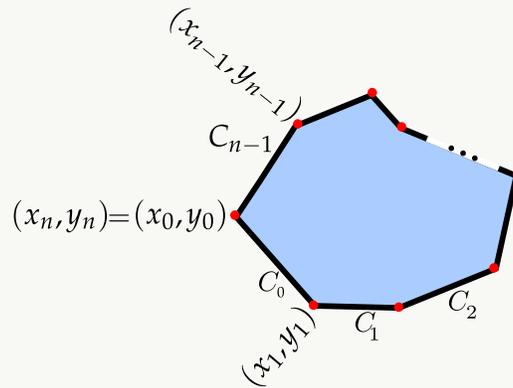
$$A_D = \int_C x \, dy = \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot b \cos t \, dt = \pi ab.$$

Ejemplo 13.7 (Área de un polígono simple).

Verifique que el área de un polígono simple de n vértices $\{(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$ es

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1} + x_k)(y_{k+1} - y_k)}{2}$$

Asumimos que $(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$.



Solución: El área del polígono es, por el teorema de Green en el plano,

$$A_P = \oint_C x \, dy = \iint_D 1 \, dA$$

Aquí $C = C_1 + C_2 + \dots + C_{n-1}$ y cada segmento C_i está parametrizado por

$$\mathbf{r}_i(t) = ((x_{k+1} - x_k)t + x_k, (y_{k+1} - y_k)t + y_k) \text{ con } t \in [0, 1],$$

entonces,

$$A_P = \oint_C x \, dy = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{C_k} (y_{k+1} - y_k) [(x_{k+1} - x_k)t + x_k] \, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1} + x_k)(y_{k+1} - y_k)}{2}$$

13.6 Solución de los ejercicios

13.2.1  

13.2.2   Una función potencial es $\phi(x, y, z) = xyz - y^2x + x^2z$

13.2.3  

(a) Como $\text{Rot}F = (0, 0, 0)$, entonces F es conservativo sobre cualquier región simplemente conexa donde $z \neq 0$.

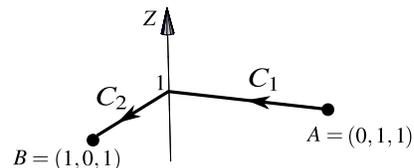
$$\begin{aligned} \phi &= \int 2x + 5 \, dx = x^2 + 5x + K_1(y, z) \\ \text{(b) } \nabla\phi = F &\implies \phi = \int 3y^2 \, dy = y^3 + K_2(x, z) \implies \phi(x, y, z) = x^2 + 5x + y^3 + \ln z. \\ \phi &= \int \frac{1}{z} \, dz = \ln |z| + K_3(x, y) \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(B) - \phi(A) = 6 - 1 = 5$$

(c) Como \mathbf{F} es conservativo en regiones simplemente conexas, donde z no se anula, podemos tomar el camino $C' = C_1 + C_2$ para integrar.

$$-C_1 : \mathbf{r}_1(t) = (0, t, 1) \text{ con } t \in [0, 1]. \quad \mathbf{r}'_1(t) = (0, 1, 0)$$

$$C_2 : \mathbf{r}_2(t) = (t, 0, 1) \text{ con } t \in [0, 1]. \quad \mathbf{r}'_2(t) = (1, 0, 0)$$



Entonces,

$$\int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_0^1 (5, 3t^2, 1) \cdot (0, 1, 0) dt + \int_0^1 (2t+5, 0, 1) \cdot (1, 0, 0) dt = -1 + 6 = 5$$

13.2.4 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

13.2.5

13.2.6

• $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ es conservativo pues $P_y = z^2 + \sin x \cos(\pi - y) = Q_x$, $r_y = 2xz = Q_z$ y $r_x = 2yz = P_z$.

• una función potencial es $\phi(x, y, z) = xyz^2 + \cos(x) \sin(\pi - y) + K$. Por lo tanto

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(0, \pi, 0) - \phi(\pi, 0, 0) = 0$$

13.2.7

1.

$$\begin{aligned} \text{Rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + y \cos(xy) & xz + x \cos(xy) & xy \end{vmatrix} = (x - x) \hat{\mathbf{i}} + (-y + y) \hat{\mathbf{j}} \\ &\quad + (z + \cos(xy) + xy \cos(xy) - (z + \cos(xy) + xy \cos(xy))) \hat{\mathbf{k}} \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

2. Sea $G(x, y, z)$ una función potencial, así

$$\bullet G_x(x, y, z) = yz + y \cos(xy) \implies G(x, y, z) = xyz + \sin(xy) + C_1(y, z)$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial y}(xyz + \sin(xy) + C_1(y, z)) = xz + x \cos(xy) \implies C_{1y}(y, z) = 0 \implies C_1(y, z) = C_2(z)$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial z}(xyz + \sin(xy) + C_2(z)) = xy \implies C_2'(z) = 0 \implies C_2(z) = K$$

Así, $G(x, y, z) = xyz + \text{sen}(xy) + K$, por lo que

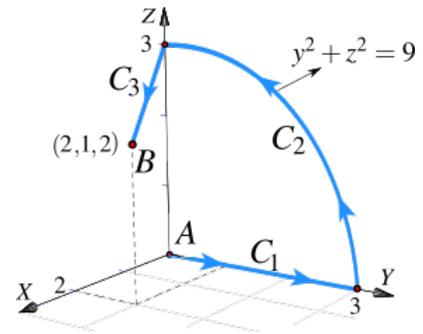
$$\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = G(0, 0, 0) - G(2, 1, 2) = K - (4 + \text{sen}(2) + K) = -4 - \text{sen}(2).$$

3. Se seguirá la siguiente ruta

$$-C_1 : \mathbf{r}_1(t) = (2, 1, t), \quad t \in [0, 2]$$

$$-C_2 : \mathbf{r}_2(t) = (t, 1, 0), \quad t \in [0, 2]$$

$$-C_3 : \mathbf{r}_3(t) = (0, t, 0), \quad t \in [0, 1]$$



Así

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_0^2 (t + \cos(2), 2t + 2\cos(2), 2) \cdot (0, 0, t) dt - \int_0^2 (\cos t, t \cos t, t) \cdot (1, 0, 0) dt - \int_0^1 (t, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) dt \\ &= - \int_0^2 2t dt - \int_0^2 \cos t dt - 0 \\ &= -t^2 \Big|_0^2 - \text{sen } t \Big|_0^2 = -4 - \text{sen}(2) \end{aligned}$$

13.2.8 Calcule usando el camino que va de $(2, 5, 0)$ a $(-2, 5, 0)$

13.2.9

13.4.1

a.) $-\frac{64}{3}$

b.) $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 4 - 36 + 28/3 + 4/3 = -\frac{64}{3}$

13.4.2

Como se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de Green en el plano, excepto la orientación de la curva, entonces

$$\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{-2}^2 \int_{3y^2/4}^3 1 - 0 dx dy = -8.$$

13.4.3 Por el teorema de Green:

$$\begin{aligned}\int_{nC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \int_0^{x^2+1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{x^2+1} (2x - 1) dy dx \\ &= \int_0^1 (2x - 1)(x^2 + 1) dx = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

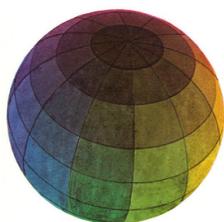
13.4.4  13.4.5  



Este material se distribuye bajo licencia Creative Commons "Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional" (CC BY-NC-ND 4.0) (ver; <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>)

Citar como:

Walter Mora F. *Cálculo en Varias Variables. Visualización interactiva*. (2019) 2da ed. [ebook] Cartago, Costa Rica. Revista digital, Matemática, Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/.



Revisado: Julio, 2022

Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF: https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

<http://www.matematicainteractivacr.com/>