Instituto Tecnológico de Costa Rica
TEC| ESCUELA DE MATEMÁTICA CÁLCULO SUPERIOR

Semana 11: Área y volumen en coordenadas polares

Integral doble: Cambio de variable. Coordenadas Polares

Revista de Matemática/Libros
W. Mora. "Cálculo en Varias Variables."

Las aplicaciones interactivas requieren haber instalado la aplicación gratuita Wolfram CDFPlayer
https://www.wolfram.com/cdf-player/

Wolfram CDF Player

Contenido

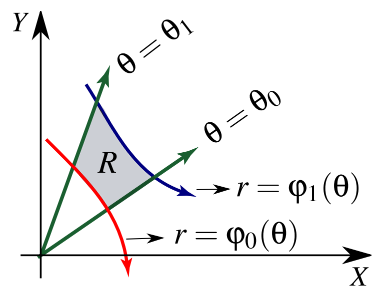
11.1 Introducción y ejemplos . . . 1
11.2 Ejercicios . . . 9
11.3 Solución de los ejercicios . . . 13
Licencia Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0 . . . 17

11.1 Introducción y ejemplos

En el folleto de la semana anterior establecimos que el cambio de variable $(x, y) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ tiene como jacobiano $J(t,\theta) = r\ \ y$, en general

- Si una región R se puede describir como una región en coordenadas polares tal que

$$0 < \varphi_0(\theta) \leqslant r \leqslant \varphi_1(\theta) \text{ si } \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1 \text{ donde } \theta_1 - \theta_0 \leqslant 2\pi$$

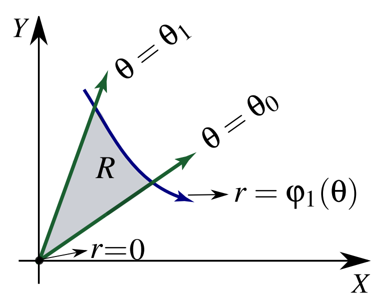


entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{\varphi_0(\theta)}^{\varphi_1(\theta)} f(\,r\cos(\theta),\ r\,\mathrm{sen}(\theta)\,)\, r\, dr\, d\theta$$

- Si una región R se puede describir como una región en coordenadas polares tal que

$$0 \leqslant r \leqslant \varphi_1(\theta) \text{ si } \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$$

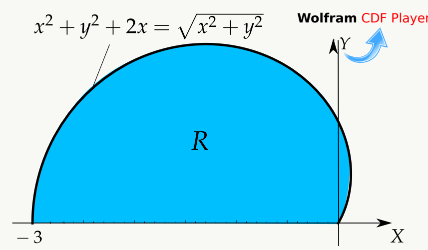


entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{0}^{\varphi_1(\theta)} f(\,r\cos(\theta),\ r\,\mathrm{sen}(\theta)\,)\, r\, dr\, d\theta$$

Ejemplo 11.1

Calcule, usando coordenadas polares, el área de la región R tal y como se muestra en la figura.



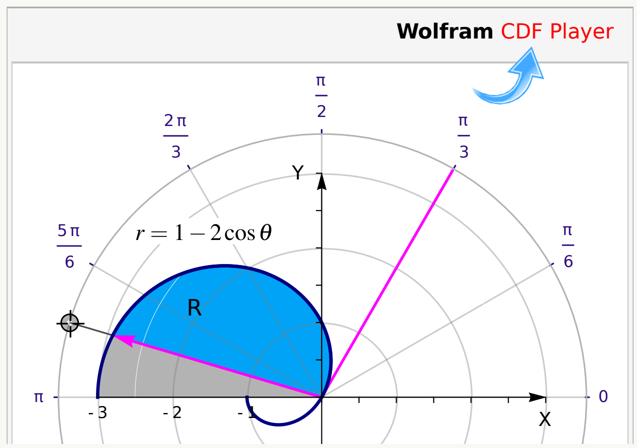
Solución: La ecuación de la curva es $x^2+y^2+2x=\sqrt{x^2+y^2}$. Como $r^2=x^2+y^2$, haciendo la conversión a coordenadas polares obtenemos la ecuación

$$r^2+2r\cos\theta=r$$

es decir, $r=1-2\cos\theta$

Tangentes al polo: Resolvemos $r=0 \Longrightarrow 1-2\cos\theta=0 \Longrightarrow \theta=\pm\pi/3$ en $[0,2\pi]$. Así, la región está entre los rayos $\theta=\pi/3$ y $\theta=\pi$. Entonces,

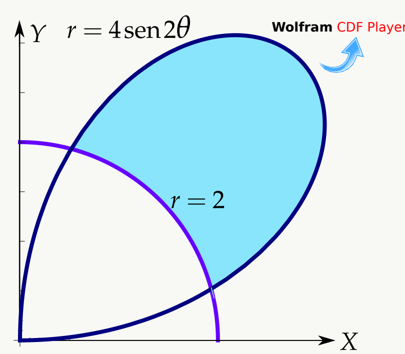
$$\begin{aligned} A_R &= \iint_R 1\cdot r\,dr\,d\theta \\ &= \int_{\pi/3}^{\pi}\int_0^{1-2\cos\theta} 1\cdot r\,dr\,d\theta \\ &= \frac{1}{4}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$



Ejemplo 11.2

Considere la región R que se muestra en la figura. Plantear, usando corrdenadas polares,

$$I=\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dA.$$



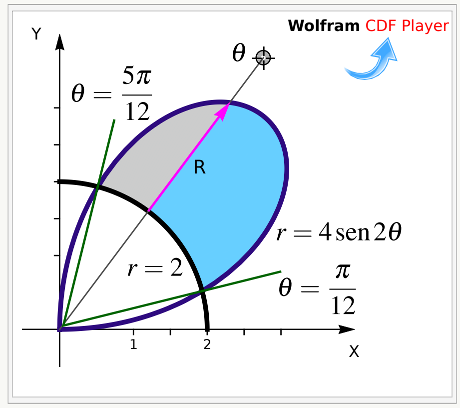
Solución: La región está entre las curvas $r=2$ y $r=4\,\mathrm{sen}\,2\theta$.
Como $r=0 \Longrightarrow r=\mathrm{sen}\,2\theta=0 \Longrightarrow \theta=0$ y $\theta=\dfrac{\pi}{2}$. Podemos verificar con la figura que el dominio de la curva $r=4\,\mathrm{sen}\,2\theta$ es $[0,\ \pi/2.]$

Para obtener los límites de integración, buscamos la intersección entre las curvas: $r = 2 \ \cap \ r = 4\,\text{sen}\,2\theta$, es decir,

$$2 = 4\,\text{sen}\,2\theta \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{12} \text{ y } \theta = \frac{5\pi}{12}.$$

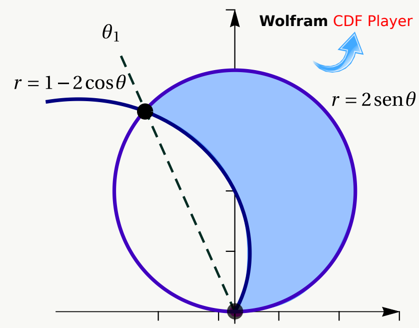
Entonces,

$$\begin{aligned} I &= \iint_R r \cdot r\,dr d\theta \\ &= \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \int_2^{4\,\text{sen}\,2\theta} r^2\ dr d\theta \end{aligned}$$

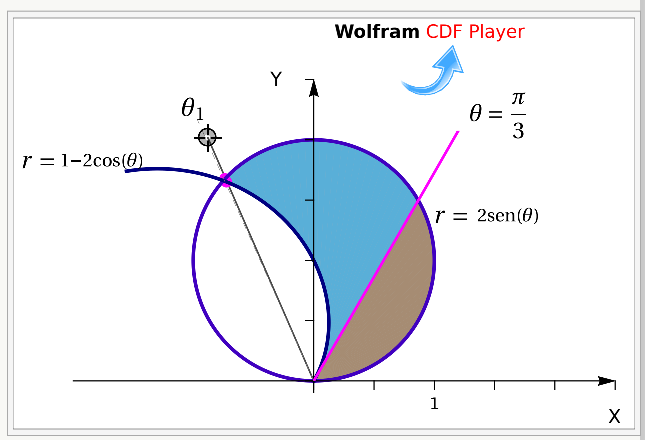


Ejemplo 11.3

Calcule $I = \iint_R xy\,dA$ si R es la región limitada por las curvas $r = 1 - 2\cos\theta$ y $r = 2\,\text{sen}\,\theta$, tal y como se muestra en la figura.



Solución: Ambas curvas "barren" la región R en el mismo intervalo!. La región de integración llega hasta la intersección de las curvas en $\theta = \theta_1$.



- **Tangentes al polo**:

$$\begin{cases} 1-2\cos\theta = 0 & \Longrightarrow \quad \theta = \dfrac{\pi}{3} \\ 2\,\text{sen}\,\theta = 0 & \Longrightarrow \quad \theta = 0 \end{cases}$$

- Cálculo de θ_1 :

$$1-2\cos\theta = 2\,\text{sen}(\theta),$$

elevamos al cuadrado,

$$-3-4\cos\theta+8\cos^2\theta = 0,$$

hacemos sustitución y resolvemos,

$$\cos\theta = \frac{4\pm\sqrt{112}}{16}$$

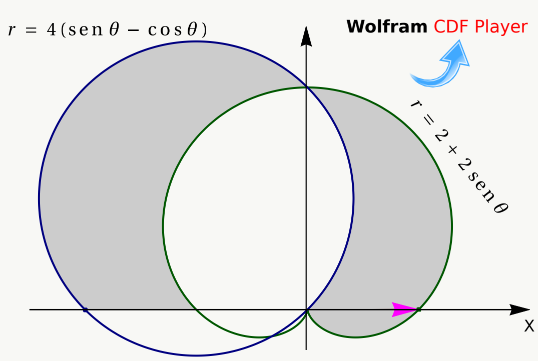
Nos sirve $\theta_1 = \arccos\left(\frac{4-\sqrt{112}}{16}\right) \approx 1.994$

$$I = \iint_R xy\ dA$$

$$= \int_0^{\pi/3}\int_0^{2\,\text{sen}(\theta)} [r\cos(\theta)\ r\,\text{sen}(\theta)]\cdot r\,dr d\theta \quad + \int_{\pi/3}^{\theta_1}\int_{1-2\cos(\theta)}^{2\,\text{sen}(\theta)} r^3\cos(\theta)\ \text{sen}(\theta)\,dr d\theta$$

Ejemplo 11.4

Calcule, usando coordenadas polares, el área de la región R tal y como se muestra en la figura.

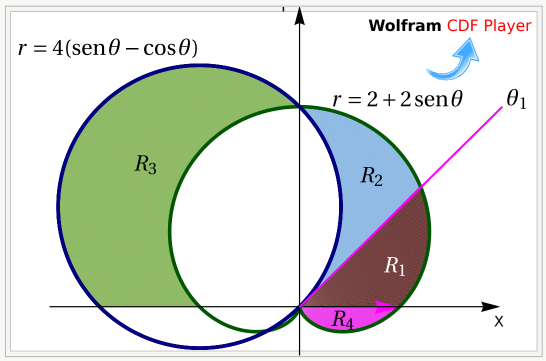


Solución: Hay varias regiones: $R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$

Tangentes al polo:

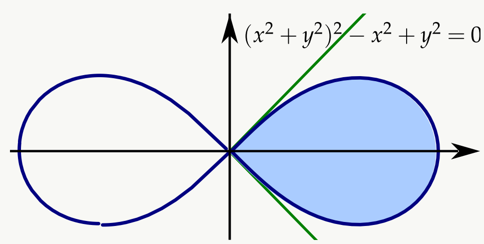
- $4(\text{sen}\,\theta-\cos\theta) = 0 \Longrightarrow \tan\theta = 1 \Longrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$
- $2+2\,\text{sen}\,\theta = 0 \Longrightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
A_R &= A_{R_1} + A_{R_2} + A_{R_3} + A_{R_4} \\
&= \iint_{R_1} 1 \cdot dA + \iint_{R_2} 1 \cdot dA + \iint_{R_3} 1 \cdot dA + \iint_{R_4} 1 \cdot dA \\
&= \int_0^{\pi/4} \int_0^{2+2\,\text{sen}\,\theta} 1 \cdot r\,dr d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{4(\text{sen}\,\theta - \cos\theta)}^{2+2\,\text{sen}\,\theta} 1 \cdot r\,dr d\theta \\
&\quad + \int_{\pi/2}^{\pi} \int_{2+2\,\text{sen}\,\theta}^{4(\text{sen}\,\theta - \cos\theta)} 1 \cdot r\,dr d\theta + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \int_0^{2+2\,\text{sen}\,\theta} 1 \cdot r\,dr d\theta
\end{aligned}$$



Ejemplo 11.5

Calcular el área de la región limitada por la curva de ecuación $(x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$, $x \geqslant 0$ (región celeste en la figura).



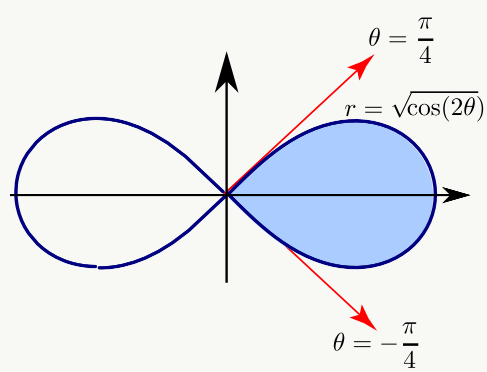
Solución: Cambio de variable $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y sustituyendo en $(x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$, obtenemos

$$\left(r^2\cos(\theta)^2 + r^2\sin(\theta)^2\right)^2 - r^2\cos(\theta)^2 + r^2\,\text{sen}(\theta)^2 = 0$$

Simplificando queda $r^2 = \cos(2\theta)$, que es la ecuación de la lemniscata. Entonces podemos tomar $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$.

Tangentes al Polo: $r = 0 \Longrightarrow \sqrt{\cos(2\theta)} = 0 \Longrightarrow \theta = \pm\dfrac{\pi}{4}$.

De la figura, podemos ver que estos rayos corresponden a los límites integración.

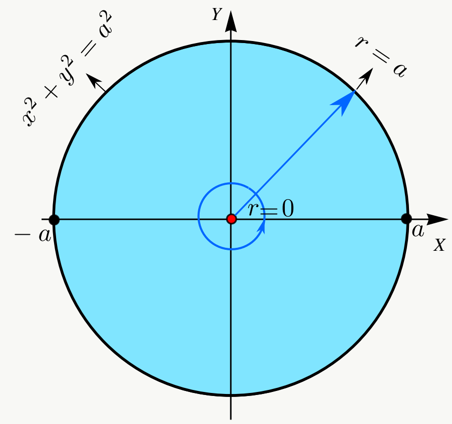


Luego, el área de la región es

$$A_R = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos(2\theta)}} r\,dr\, d\theta = 1/2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\theta)\, d\theta = 1/2.$$

Ejemplo 11.6

Calcular el área A_c del círculo de radio a.



Solución: Para este cálculo podemos usar un círculo de radio a, centrado en el origen. La circunferencia del círculo tiene ecuación cartesiana $x^2+y^2=a^2$. Para obtener la ecuación en polares, sustituimos $x=r\cos\theta$ e $y=r\operatorname{sen}\theta$ y despejamos r:

$x^2+y^2=a^2 \implies (r\cos\theta)^2+(r\operatorname{sen}\theta)^2=a^2 \implies r^2=a^2$.

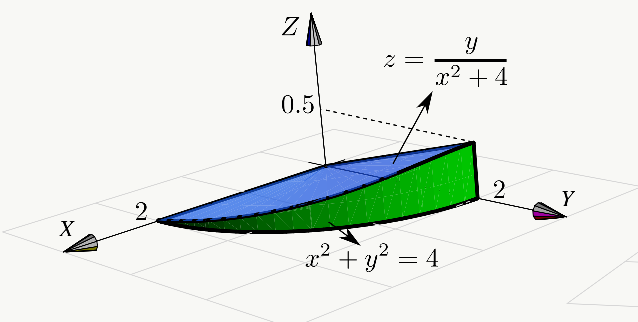
Así, en coordenadas polares, la región de integración va desde $r=0$ hasta $r=a$ y $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

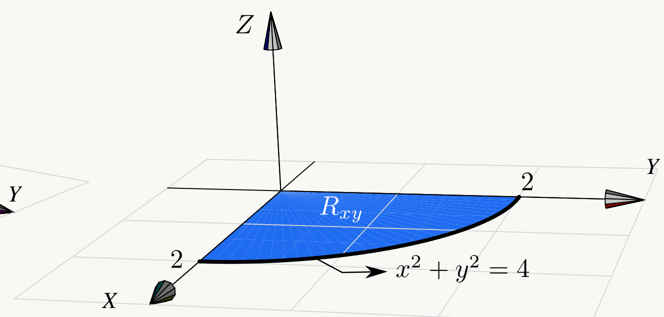
$$A_c = \iint_R 1\cdot dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^a d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2}\,d\theta = \left.\frac{a^2}{2}\theta\right|_0^{2\pi} = \pi a^2$$

Ejemplo 11.7 (Volumen)

Plantear una integral, en polares, para calcular el volumen del sólido Q limitado por las superficies $z=\dfrac{y}{x^2+4}$, $x^2+y^2=4$ y $z=0$ con $x\geqslant 0$ y $y\geqslant 0$.

Solución: El sólido y su proyección sobre el plano XY se ven en la figura.





Pasando a coordenadas polares tenemos

$$V_Q = \iint_R \left(\frac{y}{x^2+4} - 0\right) dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2} \frac{r\operatorname{sen}(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+4}\, r\,dr\,d\theta$$

Nota: Esta última integral se puede calcular observando que

- $\displaystyle\int x\arctan(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(-x+\left(1+x^2\right)\arctan x\right)$, salvo constantes.

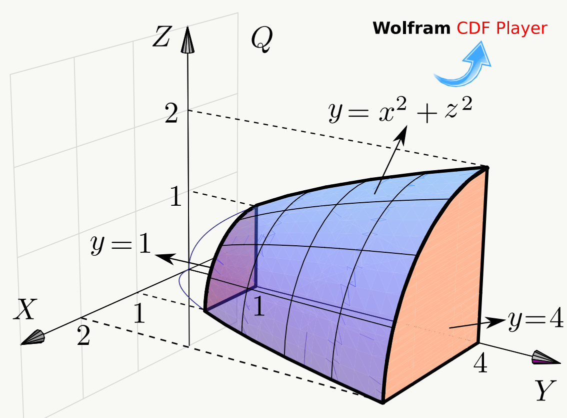
- $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^2 f(r,\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^2\int_0^{\pi/2} f(r,\theta)\,d\theta\,dr,$ pues estamos integrando sobre un rectángulo.

Veamos,

$$\begin{aligned}
V_Q &= \iint_R \frac{y}{x^2+4}\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \frac{r^2\operatorname{sen}(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+4}\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^2\int_0^{\pi/2} \frac{r^2\operatorname{sen}(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+4}\,d\theta\,dr = \int_0^2\int_0^1 \frac{r^2}{4+r^2u^2}\,du\,dr, \text{ (haciendo } u=\cos\theta). \\
&= \int_0^2\int_0^1 \frac{r}{2}\,\frac{r/2}{1+(ru/2)^2}\,du\,dr = \int_0^2 \frac{r}{2}\arctan(ru/2)\Big|_0^1\,dr = \int_0^2 \frac{r}{2}\arctan(r/2)\,dr = \frac{1}{2}(\pi-2).
\end{aligned}$$

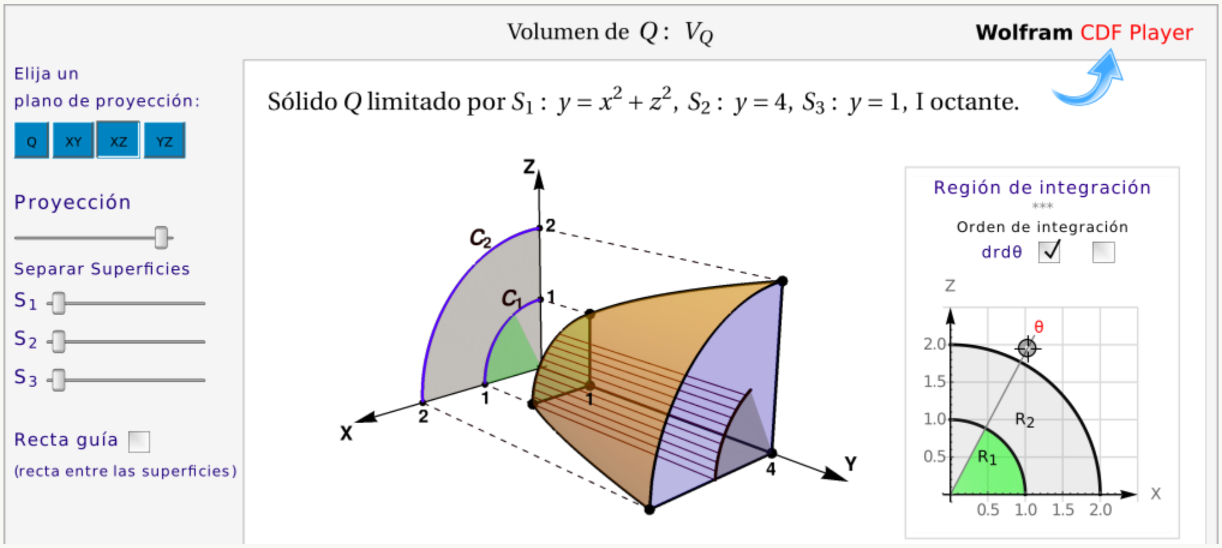
Ejemplo 11.8 (Volumen en coordenadas polares).

Plantee la integral (o las integrales) con las que se puede obtener el volumen del sólido Q limitado por las superficies $S_1: y=x^2+z^2$, $S_2: y=1$, $S_3: y=4$, en el primer octante.



Solución: La proyección del sólido Q es $R=R_1+R_2$, como se muestra en la figura de la derecha. Usamos el cambio de variable $x=r\cos\theta$, $z=r\operatorname{sen}\theta$. La proyección del sólido Q en el plano XZ está entre las curvas $r=0$ y $r=1$ y entre $r=1$ y $r=2$.

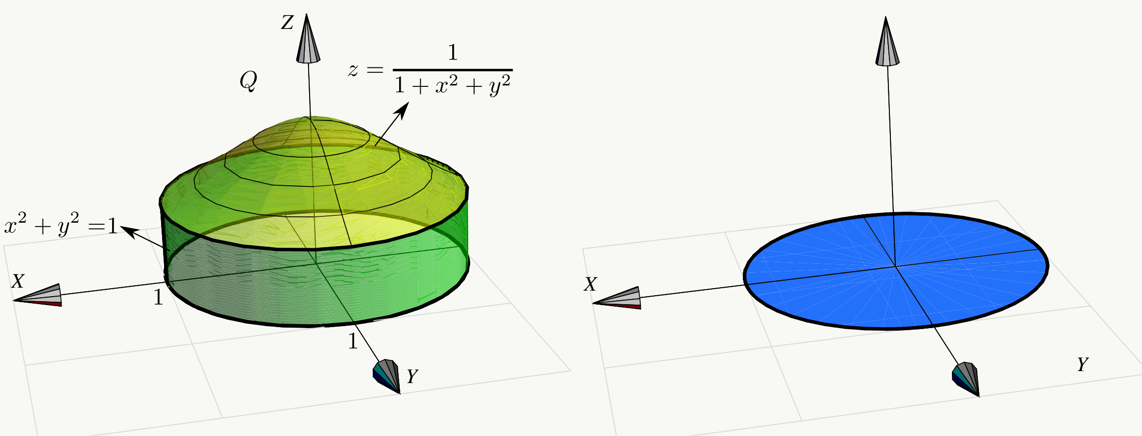
- $C_1: \; y=x^2+z^2 \bigcap y=1 \implies C_1: \; 1=x^2+z^2$
- $C_2: \; y=x^2+z^2 \bigcap y=4 \implies C_2: \; 4=x^2+z^2$



$$
\begin{aligned}
V_Q &= \iint_{R_1} (4-1)\, dA + \iint_{R_2} (4-x^2-z^2)\, dA \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (4-1)r\, dr d\theta + \int_0^{\pi/2}\int_1^2 (4-r^2)r\, dr d\theta
\end{aligned}
$$

Ejemplo 11.9 (Volumen).

Calcule el volumen del sólido Q limitado por las superficies $z = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$, $x^2+y^2=1$ y $z=0$.



Solución:

El sólido y su proyección sobre el plano XY se ven en la figura. El sólido Q está limitado por $z = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ y $z=0$. Aplicando coordenadas polares (y como no hay singularidades) tenemos

$$\begin{aligned} V_Q &= \iint_R \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{1+r^2}\, r\,dr\,d\theta \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1 \,d\theta \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\ln(2)\,d\theta = \pi\ln(2) \end{aligned}$$

Ejemplo 11.10

Calcule $\displaystyle\iint_R \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}\,dA$ si $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \,:\, x^2+y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$.

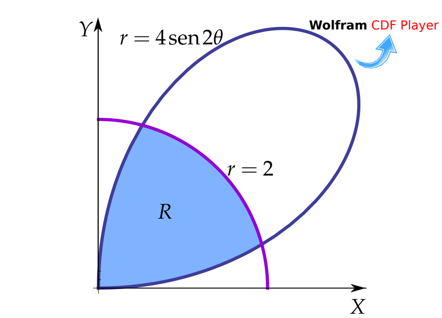
Solución: La región R es la parte del círculo de radio 1, centrado en el origen, que está en el primer octante. Aquí usamos el hecho de que $\displaystyle\int_a^b\int_p^q f(\theta)g(r)\,dr\,d\theta \;=\; \int_a^b f(\theta)\,d\theta \cdot \int_p^q g(r)\,dr.$

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}\,dA &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{r^3\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}{(1+r^2)^2}\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta \cdot \int_0^1 \frac{r^3}{(1+r^2)^2}\,dr \;=\; \frac{1}{8}\ln 4 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

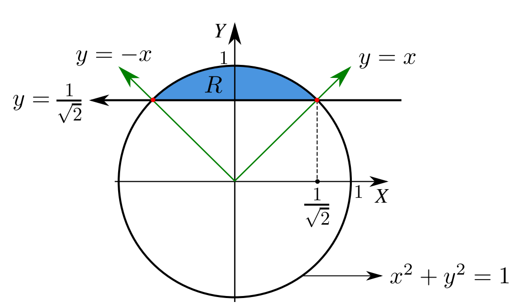
11.2 Ejercicios

Ⓡ **11.2.1** Considere la región R que se muestra en la figura. Calcule, usando coordenadas polares,

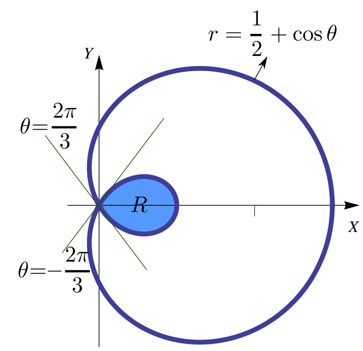
$$I = \iint_R (x^2+y^2)\,dA.$$



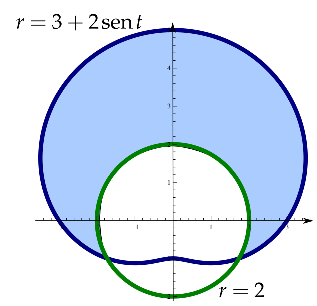
Ⓡ **11.2.2** Considere la región R de la figura. Calcular el área A_R de la región R, usando coordenadas polares.



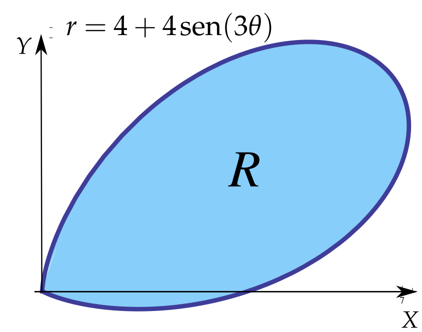
11.2.3 Calcular el área de la región limitada por el lazo de la curva $r = 1/2 + \cos\theta$. **Ayuda: Notar que el lazo interno va de** $\theta = 2\pi/3$ **a** $\theta = 4\pi/3$.



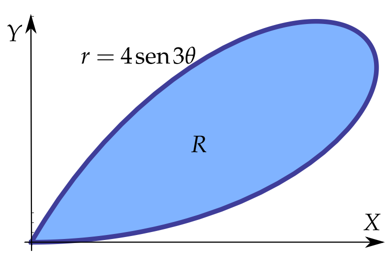
11.2.4 Verifique, usando coordenadas polares, que el área de la región R (región sombreada mostrada en la figura) es $\dfrac{11\sqrt{3}}{2} + \dfrac{14\pi}{3} \approx 24.187$.



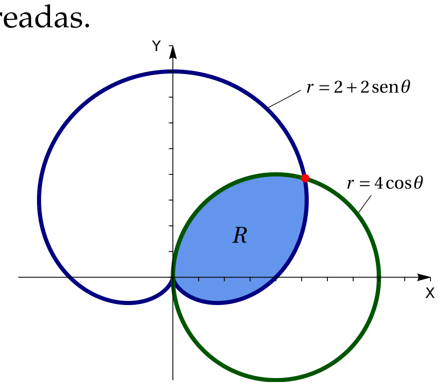
11.2.5 Calcule, usando coordenadas polares, el área de la región R tal y como se muestra en la figura.



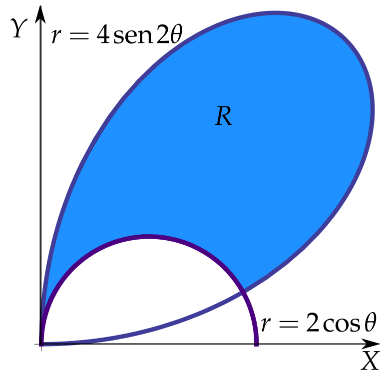
11.2.6 Calcular el área de las regiones sombreadas.



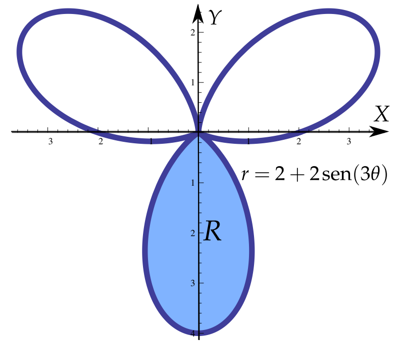
a)



b)

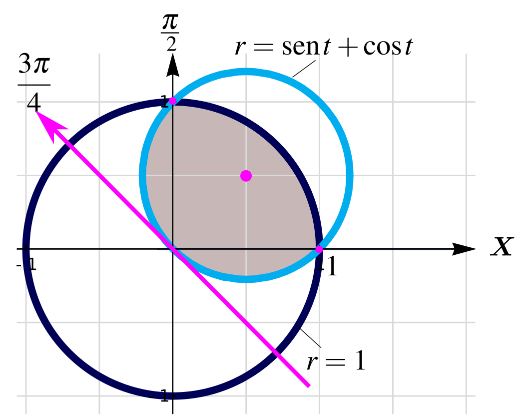


c)

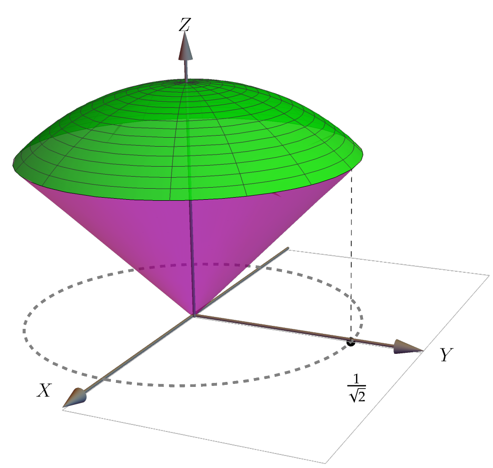


d)

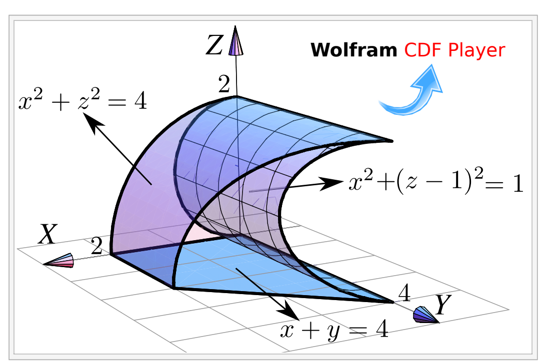
11.2.7 (*) Verifique, usando coordenadas polares, que el área de la región R (región sombreada mostrada en la figura) es $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}$

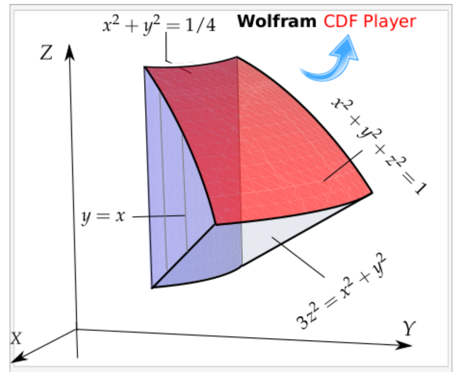


11.2.8 Calcule, usando coordenadas polares, el volumen del sólido Q limitado por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

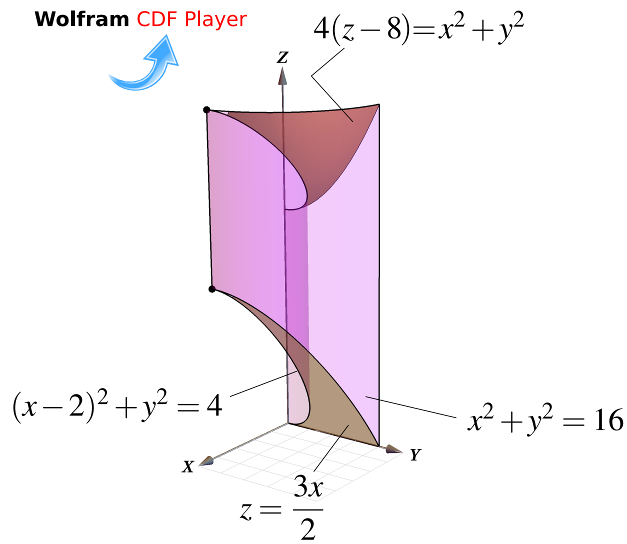


11.2.9 Calcule el volumen del sólido Q limitado por las superficies $x^2 + z^2 = 4$, $x^2 + (z-1)^2 = 1$ y $x = 4 - y$, en el primer octante; como se muestra en la figura. **Ayuda: Proyectar sobre XZ y usar coordenadas polares.**

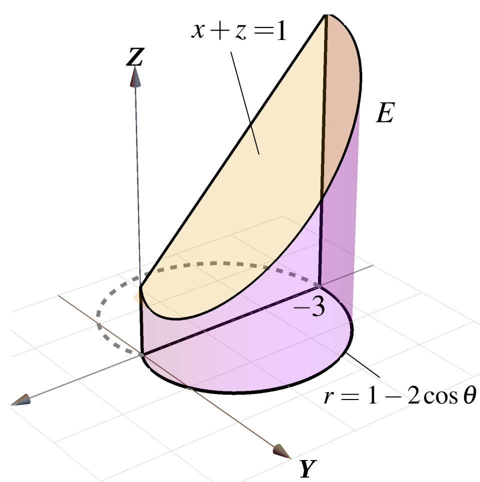




11.2.10 Considere el sólido Q limitado por el cilindro $x^2+y^2=1/4$, el cono $3z^2=x^2+y^2$, la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y los planos $x=0$ y $x=y$; tal y como se muestra en la figura. Calcular el volumen del sólido Q



11.2.11 Considere el sólido E limitado por las superficies de ecuación $S_1: x^2+y^2=16$, $S_2: (x-2)^2+y^2=4$, $S_3: z=\dfrac{3x}{2}$, $S_4: 4(z-8)=x^2+y^2$ y $x=0$, tal y como se muestra en la figura a al derecha. Calcule el volumen del sólido E



11.2.12 Considere siguientes S_1, S_2, S_3 y S_4 (tal y como se muestran a la derecha),

- S_1 es el cilindro generado por la curva $r=1-2\cos\theta$,
- $S_2: x+z=1$,
- $S_3: z=0$,
- $S_4: y=0$.

E es el sólido limitado por estas superficies, tal y como aparece a al derecha. Calcule el volumen del sólido $\mathbf{E}$

11.2.13 (*) Calcule $\displaystyle\iint_T e^{(x+y)/(x-y)}\,dA$ usando el cambio de variable $u=x+y$, $v=x-y$; donde T es el trapecio de vértices $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ y $(0,-1)$.

11.2.14 (*) Calcule $\displaystyle\iint_T \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)dA$ donde T es el trapecio de vértices $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$

y $(0,1)$. **Ayuda:** Usar cambio de variable $u = y - x,\ v = y + x$.

R **11.2.15** (*) Calcule $\iint_T xy\, dA$ donde T es la región limitada por $y = x,\ y = 3x,\ xy = 1$ y $xy = 3$; en el primer cuadrante. Use el cambio de variable $x = u/v$ y $y = v$.

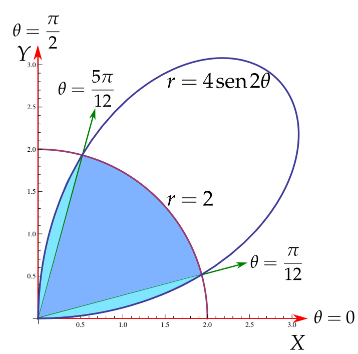
11.3 Solución de los ejercicios

11.2.1 R La región está entre las curvas $r = 2$ y $r = 4\operatorname{sen} 2\theta$. Esto nos da tres subregiones: desde el origen hasta la curva $r = 4\operatorname{sen} 2\theta$ y desde el origen hasta la curva $r = 2$.

Como $r = 0 \Longrightarrow\ r = \operatorname{sen} 2\theta = 0 \Longrightarrow \theta = 0$ y $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Podemos verificar con la figura que el dominio de la curva $r = 4\operatorname{sen} 2\theta$ es $[0,\ \pi/2.]$

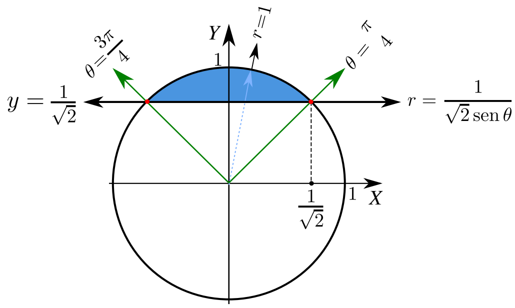
Para obtener los límites de integración de las tres subregiones, buscamos la intersección entre las curvas: $r = 2\ \cap\ r = 4\operatorname{sen} 2\theta$, es decir,

$$2 = 4\operatorname{sen} 2\theta \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{12} \text{ y } \theta = \frac{5\pi}{12}.$$



$$\begin{aligned} I &= \iint_R r^2 \cdot r\, dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/12}\int_0^{4\operatorname{sen} 2\theta} r^3\ dr d\theta \\ &+ \int_{\pi/12}^{5\pi/12}\int_0^{2} r^3\, dr d\theta \\ &+ \int_{5\pi/12}^{\pi/2}\int_0^{4\operatorname{sen} 2\theta} r^3\, dr d\theta \ = \ \frac{16\pi}{3} - 7\sqrt{3} \end{aligned}$$

11.2.2 R Debemos hacer el cambio de variable $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\operatorname{sen}(\theta)$.



Observe que

- La recta $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ se transforma en $r\,\text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \implies r = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,\text{sen}(\theta)}$.
- La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ se transforma en $r = 1$.
- La recta $y = x$ se transforma en $\theta = \pi/4$. En efecto, $y = x \implies \cos\theta = \text{sen}(\theta) \implies \theta = \pi/4$. Esto, por supuesto, también lo podemos establecer de manera geométrica.

$$A_R = \iint_R 1 \cdot dA = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}\,\text{sen}(\theta)}}^{1} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}\,\text{sen}(\theta)}}^{1} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{1}{\text{sen}^2(\theta)}\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\csc^2(\theta)\,d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\cot(\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi - 2}{4}$$

11.2.3 R

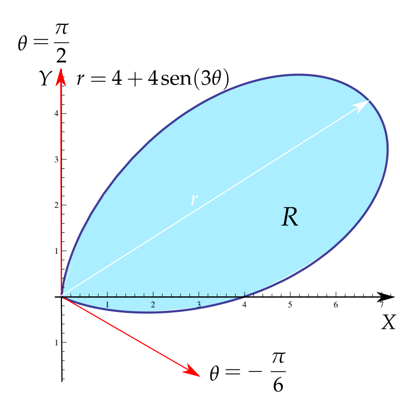
11.2.4 R Los límites de integración son $\theta = -\pi/6$ y $\theta = 7\pi/6$. Ahora calcule la integral que da el área.

11.2.5 R La ecuación de la curva es $r = 4 + 4\,\text{sen}\,3\theta$.

Tangentes al polo: $4 + 4\,\text{sen}\,3\theta = 0 \implies \theta = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\dfrac{\pi}{3}$.

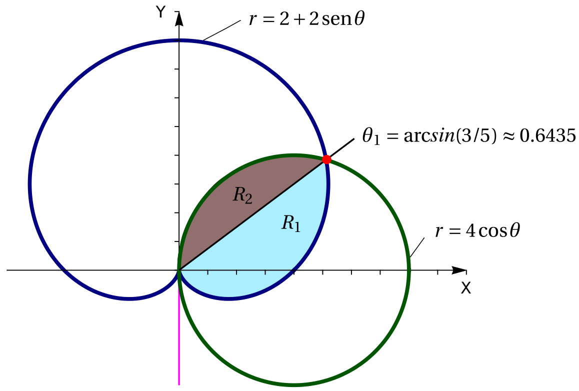
Observando la figura tenemos que los límites de integración adecuados son $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ y $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

$$A_R = \iint_R 1 \cdot r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{4+4\,\text{sen}\,\theta} 1 \cdot r\,dr\,d\theta = 8\pi$$



11.2.6 R

a.)



a.) **Tangentes al polo:**

$$2 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \implies \theta = -\frac{\pi}{2}$$
$$4\cos\theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2}$$

b.) **Intersección**

$$2 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta = 4\cos\theta \implies -12 + 8\,\mathrm{sen}\,\theta + 20\,\mathrm{sen}^2\,\theta = 0 \implies \theta = \mathrm{arc\,sen}(3/5) \approx 0.6435$$

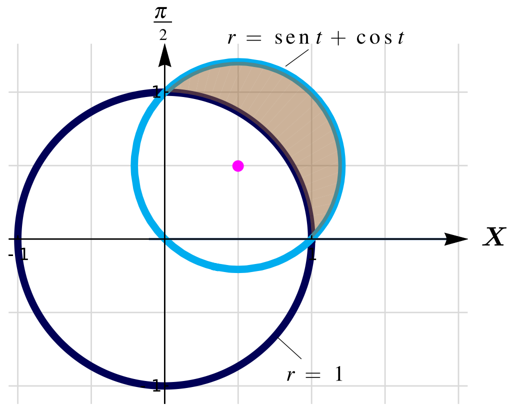
c.) **Área:** $A_R = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\mathrm{arc\,sen}\left(\frac{3}{5}\right)} \int_0^{2+2\,\mathrm{sen}(\theta)} r\,dr\,d\theta + \int_{\mathrm{arc\,sen}\left(\frac{3}{5}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos(\theta)} r\,dr\,d\theta = -\frac{28}{5} + \frac{7\pi}{2} - \mathrm{arc\,sen}\left(\frac{3}{5}\right)$

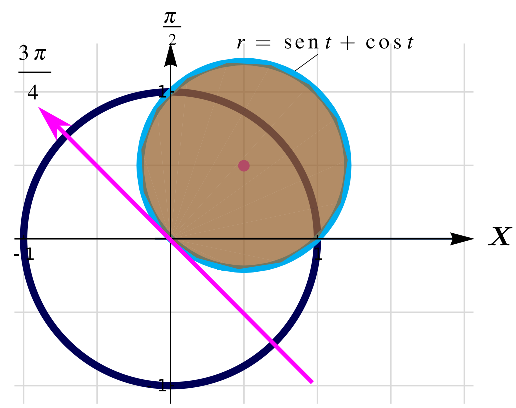
d.) $r = 0 \implies 2 + 2\,\mathrm{sen}(3\theta) = 0\ \theta_1 = \dfrac{7\pi}{6}$ y $\theta_2 = \dfrac{11\pi}{6}$.

$$\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \int_0^{2\sin(3\theta)+2} 1r\,dr\,d\theta = 2\pi$$

Nota: El intervalo $[-7\pi/6, -\pi/6]$ no es correcto, agrega un trozo adicional de curva y el resultado daría, en valor absoluto, 3π. Use Wolfram Alpha (Internet) para graficar **`+ 2 Sin[3t]PolarPlot[2, t, -7 Pi/6, -Pi/6]`**

11.2.7 R Note que la curva celeste tiene ecuación $r = \mathrm{sen}\,t + \cos t$ con $t \in [-\pi/4,\ 3\pi/4]$. La región sombreada requiere diferentes intervalos para cada curva. Mejor es calcular el área del círculo con circunferencia celeste y restar el área de la región que va de la circunferencia azul a la circunferencia celeste, esa regón si está entre 0 y $\pi/2$ para ambas curvas.





$$A_R = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\sin(t)+\cos(t)} 1\, r\, dr\, dt \;-\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sin(t)+\cos(t)} 1\, r\, dr\, dt = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

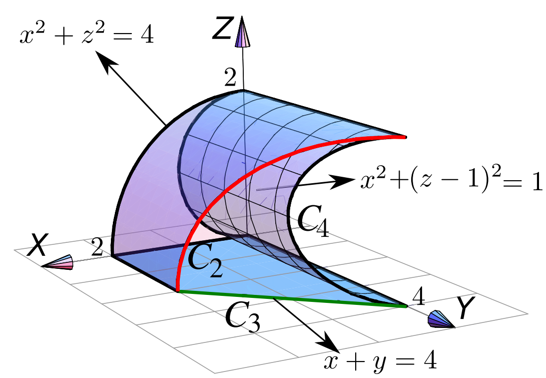
11.2.8 R

$$V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{1} \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \frac{\pi}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

11.2.9 R

La manera fácil es proyectar sobre XZ y usar coordenadas polares,

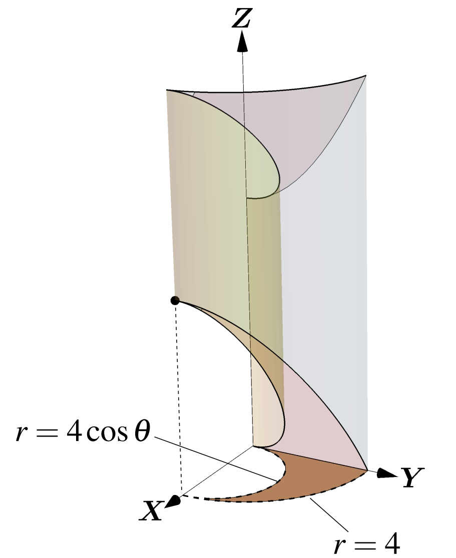
$$\begin{aligned} V_Q &= \iint_{R_{xz}} 4 - x \, dA \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_{2 \operatorname{sen} \theta}^{2} (4 - r\cos\theta) \cdot r \, dr \, d\theta \\ &= 2\pi - 2 \end{aligned}$$



11.2.10 R Proyectar sobre XZ y usar coordenadas polares. Calculando la intersección entre las superficies podemos establecer que la región de integración R_{xy} está entre las curvas $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ y las rectas $y = x$ y $x = 0$.

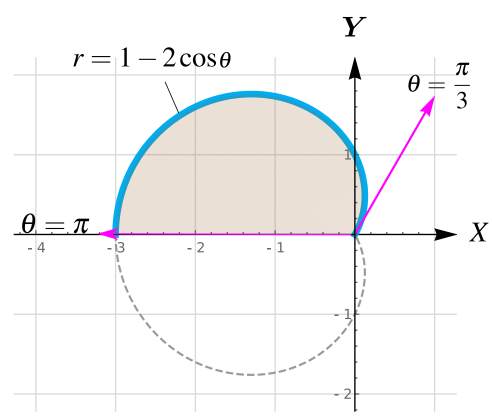
$$V_Q = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{3}} \right) r \, dr d\theta$$

11.2.11 R Si $x = r\cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$ y $z = z$; entonces en la proyección XY tenemos una región limitada por la curva $C_1 :\; x^2 + y^2 = 16$ o también $C_1 :\; r = 4$ y la curva $(x-2)^2 + y^2 = 4$ o también $r = 4\cos\theta$ con $\theta \in [0, \pi/2]$.



$$\begin{aligned} V_Q &= \iint_{R_{xy}} \left(8 + \frac{x^2+y^2}{4} - \frac{3x}{2}\right) dA \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_{4\cos\theta}^{4} \left(8 + \frac{r^2}{4} - \frac{3r\cos\theta}{2}\right) r\,dr\,d\theta \\ &= -32 + 27\pi \approx 52.823 \end{aligned}$$

11.2.12 Ⓡ



$$\begin{aligned} V_E &= \iint_{R_{xy}} (1 - x - 0)\,dA \\ &= \int_{\pi/3}^{\pi}\int_0^{1-2\cos\theta} (1 - r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta \\ &= \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\cos\theta\Big|_0^{1-2\cos\theta}\,d\theta \\ &= \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{(1-2\cos\theta)^2}{2} - \frac{(1-2\cos\theta)^3}{3}\cos\theta\,d\theta \approx 10.578 \end{aligned}$$

11.2.13 Ⓡ $I = 3/4(e - e^{-1})$.

11.2.14 Ⓡ

11.2.15 Ⓡ

Citar como:

Walter Mora F. *Cálculo en Varias Variables. Visualización interactiva.* (2019) 2da ed. [ebook] Cartago, Costa Rica. Revista digital, Matemática, Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/.

Revisado: Julio, 2022

Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF: https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

http://www.matematicainteractivacr.com/